

RINGKASAAN TWO-WAY MULTIVARIATE ANALYSIS OF VARIANS

Misal terdapat sebanyak g level pada faktor 1 dan terdapat sebanyak b level pada faktor 2, serta observasi yang independen sebanyak n yang diamati pada setiap kombinasi level-level l, k, r .

- ▶ X_{lkr} adalah notasi dari observasi ke- r di level l pada faktor 1 dan di level k pada faktor 2.

Model dari univariate two-way adalah

$$\begin{aligned}X_{lkr} &= \mu + \tau_l + \beta_k + \gamma_{lk} + e_{lkr} \\l &= 1, 2, \dots, g \\k &= 1, 2, \dots, b \\r &= 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

$$\text{Dimana } \sum_{l=1}^g \tau_l = \sum_{k=1}^b \beta_k = \sum_{l=1}^g \gamma_{lk} = 0 \quad \text{dan} \quad e_{lkr} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

μ menunjukkan keseluruhan level

τ_l menunjukkan fixed effect dari faktor 1

β_k menunjukkan fixed effect dari faktor 2

γ_{lk} ialah interaksi antara faktor 1 dan faktor 2

Ekspektasi di level ke- l pada faktor 1 dan di level ke- k pada faktor 2, sebagai berikut:

$$E(X_{lkr}) = \mu + \tau_l + \beta_k + \gamma_{lk}$$

The Likelihood Ratio Test

Perumusan hipotesis

$$H_0 : \gamma_{11} = \gamma_{12} = \dots = \gamma_{gb} = 0 \quad (\text{tidak ada efek dr interaksi})$$

H_1 : paling sedikit satu tanda “=” tidak berlaku

Besaran yang diperlukan $|SSP_{res}|$ dan $|SSP_{int} + SSP_{res}|$

Statistik uji

$$\Lambda^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{int} + SSP_{res}|}$$

Tolak H_0 jika

$$-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(g-1)(b-1)}{2} \right] \ln \Lambda^* > \chi_{(g-1)(b-1)p}^2(\alpha)$$

$$\text{Atau } F = \left(\frac{1 - \Lambda^*}{\Lambda^*} \right) \frac{(gb(n-1) - p + 1)/2}{(|(g-1)(b-1) - p| + 1)/2} < F_{\alpha; \nu_1, \nu_2}$$

$$\text{Dengan } \nu_1 = |(g-1)(b-1) - p| + 1$$

$$\nu_2 = gb(n-1) - p + 1$$

Kesimpulan

Biasanya, test untuk interaksi dilakukan sebelum test untuk efek dari faktor yang utama. Bila terdapat efek dari interaksi maka efek-efek dari faktor tidak memiliki penafsiran yang jelas. Hal ini mengakibatkan tidak baik untuk melakukan test multivariate selanjutnya.

Uji Efek Faktor 1

Perumusan hipotesis

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_g = 0 \quad (\text{tidak ada efek dr faktor 1})$$

H_1 : paling sedikit satu tanda “=” tidak berlaku

Besaran yang diperlukan $|SSP_{res}|$ dan $|SSP_{fac1} + SSP_{res}|$

Statistik uji
$$\Lambda_1^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{fac1} + SSP_{res}|}$$

Tolak H_0 jika

$$-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(g-1)}{2} \right] \ln \Lambda_1^* > \chi_{(g-1)p}^2(\alpha)$$

Atau
$$F_1 = \left(\frac{1 - \Lambda_1^*}{\Lambda_1^*} \right) \frac{(gb(n-1) - p + 1)/2}{(|(g-1) - p| + 1)/2} < F_{\alpha; \nu_1, \nu_2}$$

Dengan $\nu_1 = |(g-1) - p| + 1$
 $\nu_2 = gb(n-1) - p + 1$

Kesimpulan

Uji Efek Faktor 2

Perumusan hipotesis

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_g = 0 \text{ (tidak ada efek dr faktor 2)}$$

$$H_1 : \text{paling sedikit satu tanda "="" tidak berlaku}$$

Besaran yang diperlukan $|SSP_{res}|$ dan $|SSP_{fac2} + SSP_{res}|$

Statistik uji
$$\Lambda_2^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{fac2} + SSP_{res}|}$$

Tolak H_0 jika

$$-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(b-1)}{2} \right] \ln \Lambda_2^* > \chi_{(b-1)p}^2(\alpha)$$

$$\text{atau } F_2 = \left(\frac{1 - \Lambda_2^*}{\Lambda_2^*} \right) \frac{(gb(n-1) - p + 1) / 2}{(|(b-1) - p| + 1) / 2} < F_{\alpha; \nu_1, \nu_2}$$

$$\begin{aligned} \text{Dengan } \nu_1 &= |(b-1) - p| + 1 \\ \nu_2 &= gb(n-1) - p + 1 \end{aligned}$$

Kesimpulan

Contoh 6.12

Kondisi yang optimum untuk meng-*extruding* film plastik digunakan suatu teknik, yang disebut *Evolutionary Operation*. Terdapat 3 variabel yaitu x_1 =*tear resistance*, x_2 =*gloss*, x_3 =*opacity*. Telah dilakukan pengukuran terhadap ke-3 variabel tersebut, pengukuran dilakukan pada dua level di setiap faktor, *rate of extrusion* dan *ammount of additive*. Pengukuran dilakukan sebanyak n=5 kali pada setiap kombinasi pada level setiap faktor.

Hasil pengukuran terdapat pada tabel berikut ini.

Tabel Data Plastic Film

x_1 =tear resistance, x_2 =gloss, x_3 =opacity							
		Factor 2: amount of additive					
		Low (1.0%)			High (1.5%)		
Factor 1: change in rate of extrusion	Low (-10%)	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
		6.5	9.5	4.4	6.9	9.1	5.7
		6.2	9.9	6.4	7.2	10	2.0
		5.8	9.6	3.0	6.9	9.9	3.9
		6.5	9.6	4.1	6.1	9.5	1.9
	6.5	9.2	0.8	6.3	9.4	5.7	
	High (10%)	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
		6.7	9.1	2.8	7.1	9.2	8.4
		6.6	9.3	4.1	7.0	8.8	5.2
		7.2	8.3	3.8	7.2	9.7	6.9
7.1		8.4	1.6	7.5	10.1	2.7	
6.8	8.5	3.4	7.6	9.2	1.9		

Jawab :

Diketahui: $g=2$, $b=2$, $n=5$, $p=3$

$$SSP_{fac1} = \sum_{l=1}^g bn(\bar{x}_{l.} - \bar{x})(\bar{x}_{l.} - \bar{x})'$$

$$\bar{x}_{2.} = \begin{bmatrix} 7,08 \\ 9,06 \\ 4,08 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_{1.} = \begin{bmatrix} 6,49 \\ 9,57 \\ 3,79 \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 6,785 \\ 9,315 \\ 3,935 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{1.} - \bar{x} = \begin{bmatrix} 6,49 \\ 9,57 \\ 3,79 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6,785 \\ 9,315 \\ 3,935 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,295 \\ 0,255 \\ -0,145 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}) \mathbf{C}_{1.}^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}) = \begin{bmatrix} 0,087025 & -0,075225 & 0,042775 \\ & 0,065025 & -0,036975 \\ & & 0,021025 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_2 - \bar{x} = \begin{bmatrix} 7,08 \\ 9,06 \\ 4,08 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6,785 \\ 9,315 \\ 3,935 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,295 \\ -0,255 \\ 0,145 \end{bmatrix}$$

$$SSP_{fac2} = \sum_{k=1}^b gn(\bar{x}_{.k} - \bar{x})(\bar{x}_{.k} - \bar{x})'$$

$$\bar{x}_{.1} = \begin{bmatrix} 6,59 \\ 9,14 \\ 3,44 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_{.2} = \begin{bmatrix} 6,98 \\ 9,49 \\ 4,43 \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 6,785 \\ 9,315 \\ 3,935 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{.1} - \bar{x} = \begin{bmatrix} 6,59 \\ 9,14 \\ 3,44 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6,785 \\ 9,315 \\ 3,935 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,195 \\ -0,175 \\ -0,495 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{x}_{.1} - \bar{x}) \mathbf{C}_{1.}^{-1} (\bar{x}_{.1} - \bar{x}) = \begin{bmatrix} 0,038025 & 0,034125 & 0,096525 \\ & 0,030625 & 0,086625 \\ & & 0,245025 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{.2} - \bar{x} = \begin{bmatrix} 6,98 \\ 9,49 \\ 4,43 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6,785 \\ 9,315 \\ 3,935 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,195 \\ 0,175 \\ 0,495 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{x}_{.2} - \bar{x}) \mathbf{C}_{2.}^{-1} (\bar{x}_{.2} - \bar{x}) = \begin{bmatrix} 0,038025 & 0,034125 & 0,096525 \\ & 0,030625 & 0,086625 \\ & & 0,245025 \end{bmatrix}$$

$$SSP_{fac2} = (2 \times 5) \left(2 \begin{bmatrix} 0,038025 & 0,034125 & 0,096525 \\ & 0,030625 & 0,086625 \\ & & 0,245025 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0,7605 & 0,6825 & 1,9305 \\ & 0,6125 & 1,7325 \\ & & 4,9005 \end{bmatrix}$$

$$SSP_{int} = \sum_{l=1}^g \sum_{k=1}^b n(\bar{x}_{lk} - \bar{x}_{l.} - \bar{x}_{.k} + \bar{x})(\bar{x}_{lk} - \bar{x}_{l.} - \bar{x}_{.k} + \bar{x})'$$

$$\bar{x}_{11} = \begin{bmatrix} 6,3 \\ 9,56 \\ 3,74 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_{12} = \begin{bmatrix} 6,68 \\ 9,58 \\ 3,84 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_{21} = \begin{bmatrix} 6,88 \\ 8,72 \\ 3,14 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_{22} = \begin{bmatrix} 7,28 \\ 9,4 \\ 3,02 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{11} - \bar{x}_{1.} - \bar{x}_{.1} + \bar{x} = \begin{bmatrix} 6,3 \\ 9,56 \\ 3,74 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6,49 \\ 9,57 \\ 3,79 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6,59 \\ 9,14 \\ 3,44 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6,785 \\ 9,315 \\ 3,935 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,005 \\ 0,165 \\ 0,445 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{x}_{11} - \bar{x}_{1.} - \bar{x}_{.1} + \bar{x})(\bar{x}_{11} - \bar{x}_{1.} - \bar{x}_{.1} + \bar{x})' = \begin{bmatrix} 0,000025 & 0,000825 & 0,002225 \\ & 0,027225 & 0,073425 \\ & & 0,198025 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{12} - \bar{x}_{1.} - \bar{x}_{.2} + \bar{x} = \begin{bmatrix} 6,68 \\ 9,58 \\ 3,84 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6,49 \\ 9,57 \\ 3,79 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6,98 \\ 9,49 \\ 4,43 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6,785 \\ 9,315 \\ 3,935 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,005 \\ -0,165 \\ -0,445 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{x}_{12} - \bar{x}_{1.} - \bar{x}_{.2} + \bar{x})(\bar{x}_{12} - \bar{x}_{1.} - \bar{x}_{.2} + \bar{x})' = \begin{bmatrix} 0,000025 & 0,000825 & 0,002225 \\ & 0,027225 & 0,073425 \\ & & 0,198025 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{21} - \bar{x}_2 - \bar{x}_1 + \bar{x} = \begin{bmatrix} 6,88 \\ 8,72 \\ 3,14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7,08 \\ 9,06 \\ 4,08 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6,59 \\ 9,14 \\ 3,44 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6,785 \\ 9,315 \\ 3,935 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,005 \\ -0,165 \\ -0,445 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{x}_{21} - \bar{x}_2 - \bar{x}_1 + \bar{x})(\bar{x}_{21} - \bar{x}_2 - \bar{x}_1 + \bar{x})' = \begin{bmatrix} 0,000025 & 0,000825 & 0,002225 \\ & 0,027225 & 0,073425 \\ & & 0,198025 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{22} - \bar{x}_2 - \bar{x}_2 + \bar{x} = \begin{bmatrix} 7,28 \\ 9,4 \\ 5,02 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7,08 \\ 9,06 \\ 4,08 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6,98 \\ 9,49 \\ 4,43 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6,785 \\ 9,315 \\ 3,935 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,005 \\ 0,165 \\ 0,445 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{x}_{22} - \bar{x}_2 - \bar{x}_2 + \bar{x})(\bar{x}_{22} - \bar{x}_2 - \bar{x}_2 + \bar{x})' = \begin{bmatrix} 0,000025 & 0,000825 & 0,002225 \\ & 0,027225 & 0,073425 \\ & & 0,198025 \end{bmatrix}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} (\bar{x}_{11} - \bar{x}_1 - \bar{x}_1 + \bar{x})(\bar{x}_{11} - \bar{x}_1 - \bar{x}_1 + \bar{x})' &= (\bar{x}_{12} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{x})(\bar{x}_{12} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{x})' \\ &= (\bar{x}_{21} - \bar{x}_2 - \bar{x}_1 + \bar{x})(\bar{x}_{21} - \bar{x}_2 - \bar{x}_1 + \bar{x})' \\ &= (\bar{x}_{22} - \bar{x}_2 - \bar{x}_2 + \bar{x})(\bar{x}_{22} - \bar{x}_2 - \bar{x}_2 + \bar{x})' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SSP_{\text{int}} &= 5 \left(4 \begin{bmatrix} 0,000025 & 0,000825 & 0,002225 \\ & 0,027225 & 0,073425 \\ & & 0,198025 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0,0005 & 0,0165 & 0,0445 \\ & 0,5445 & 1,4685 \\ & & 3,9605 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$SSP_{\text{res}} = \sum_{l=1}^g \sum_{k=1}^b \sum_{r=1}^n (x_{lkr} - \bar{x}_{lk})(x_{lkr} - \bar{x}_{lk})'$$

$$x_{111} = \begin{bmatrix} 6,5 \\ 9,5 \\ 4,4 \end{bmatrix} \quad x_{112} = \begin{bmatrix} 6,2 \\ 9,9 \\ 6,4 \end{bmatrix} \quad x_{113} = \begin{bmatrix} 5,8 \\ 9,6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x_{114} = \begin{bmatrix} 6,5 \\ 9,6 \\ 4,1 \end{bmatrix} \quad x_{115} = \begin{bmatrix} 6,5 \\ 9,2 \\ 0,8 \end{bmatrix}$$

Tabel MANOVA

Sumber Variasi	SSP	dk
Factor 1: Change in rate of extrusion	$\begin{pmatrix} 1,7405 & -1,5045 & 0,8555 \\ & 1,3005 & -0,7395 \\ & & 0,4205 \end{pmatrix}$	1
Factor 2: Amount of additive	$\begin{pmatrix} 0,7605 & 0,6825 & 1,9305 \\ & 0,6125 & 1,7325 \\ & & 4,9005 \end{pmatrix}$	1
Interaction	$\begin{pmatrix} 0,0005 & 0,0165 & 0,0445 \\ & 0,5445 & 1,4685 \\ & & 3,9605 \end{pmatrix}$	1
Residual	$\begin{pmatrix} 1,7640 & 0,0200 & -3,0700 \\ & 2,2680 & -0,5520 \\ & & 64,9240 \end{pmatrix}$	16
Total (corrected)	$\begin{pmatrix} 4,2655 & -0,7855 & -0,2395 \\ & 5,0855 & 1,9095 \\ & & 74,2055 \end{pmatrix}$	19

Uji Untuk Interaksi

- ▶ Perumusan hipotesis

$$H_0 : \gamma_{11} = \gamma_{12} = \dots = \gamma_{22} = 0 \quad (\text{tidak ada efek dari interaksi faktor 1 dan faktor 2})$$

H_1 : paling sedikit satu tanda “≠” tidak berlaku

- ▶ Besaran yang diperlukan

$$|SSP_{res}| = 275,7098$$

$$|SSP_{int} + SSP_{res}| = 354,7906$$

- ▶ Statistik Uji

$$\Lambda^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{int} + SSP_{res}|} = \frac{275,7098}{354,7906} = 0,7771$$

$$F_{hit} = \left(\frac{1 - \Lambda^*}{\Lambda^*} \right) \frac{(gb(n-1) - p + 1) / 2}{(|(g-1)(b-1) - p| + 1) / 2}$$

$$= \left(\frac{1 - 0,7771}{0,7771} \right) \frac{(2(2)(5-1) - 3 + 1) / 2}{(|(2-1)(2-1) - 3| + 1) / 2} = 1,34$$

► Kriteria pengujian

tolak H_0 jika $F_{hit} > F_{tabel}$

$$F_{tabel} = F_{\alpha; v_1, v_2}$$

$$v_1 = |(g-1)(b-1) - p| + 1 = |(2-1)(2-1) - 3| + 1 = 3$$

$$v_2 = gb(n-1) - p + 1 = 2(2)(5-1) - 3 + 1 = 14$$

$$F_{tabel} = F_{0,05; 3, 14} = 3,34$$

Karena $F_{hit} = 1,34 < 3,34 = F_{tabel}$

Berarti terima H_0 .

► Kesimpulan

Tidak ada pengaruh yang signifikan dari interaksi antara faktor 1 (*change in rate of extrusion*) dan faktor 2 (*Amount of additive*) dalam proses *extruding*.

Uji Untuk Faktor 1

► Perumusan hipotesis

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = 0 \quad (\text{tidak ada efek dari faktor 1})$$

H_1 : paling sedikit satu tanda “=” tidak berlaku

► Besaran yang diperlukan

$$|SSP_{res}| = 275,7098$$

$$|SSP_{fac1} + SSP_{res}| = 722,0212$$

► Statistik uji

$$\Lambda_1^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{fac1} + SSP_{res}|} = \frac{275,7098}{722,0212} = 0,3819$$

$$F_{hit} = \left(\frac{1 - \Lambda^*}{\Lambda^*} \right) \frac{(gb(n-1) - p + 1) / 2}{(|(g-1)(b-1) - p| + 1) / 2}$$

$$= \left(\frac{1 - 0,7771}{0,7771} \right) \frac{(2(2)(5-1) - 3 + 1) / 2}{(|(2-1)(2-1) - 3| + 1) / 2} = 1,34$$

► Kriteria pengujian

tolak H_0 jika $F_{hit} > F_{tabel}$

$$F_{tabel} = F_{\alpha; \nu_1, \nu_2}$$

$$\nu_1 = |(g-1)(b-1) - p| + 1 = |(2-1)(2-1) - 3| + 1 = 3$$

$$\nu_2 = gb(n-1) - p + 1 = 2(2)(5-1) - 3 + 1 = 14$$

$$F_{tabel} = F_{0,05; 3, 14} = 3,34$$

Karena $F_{hit} = 1,34 < 3,34 = F_{tabel}$

Berarti terima H_0 .

► Kesimpulan

Tidak ada pengaruh yang signifikan faktor 1 (*change in rate of extrusion*) dalam proses *extruding*.

Uji untuk Faktor 2

► Perumusan hipotesis

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad (\text{tidak ada efek dari faktor 2})$$

H_1 : paling sedikit satu tanda “=” tidak berlaku

► Besaran yang diperlukan

$$|SSP_{res}| = 275,7098$$

$$|SSP_{fac1} + SSP_{res}| = 722,0212$$

► Statistik uji

$$\Lambda_1^* = \frac{|SSP_{res}|}{|SSP_{fac1} + SSP_{res}|} = \frac{275,7098}{722,0212} = 0,3819$$

$$F_1 = \left(\frac{1 - \Lambda_1^*}{\Lambda_1^*} \right) \frac{gb(n-1) - p + 1}{|(g-1) - p| + 1} / 2$$

$$= \left(\frac{1 - 0,3819}{0,3819} \right) \frac{(2(2)(5-1) - 3 + 1) / 2}{|(2-1) - 3| + 1} / 2 = 7,55$$

► Kriteria Pengujian

tolak H_0 jika $F_1 > F_{\text{tabel}}$

$$F_{\text{tabel}} = F_{\alpha; v_1, v_2}$$

$$v_1 = |(g-1) - p| + 1 = |(2-1) - 3| + 1 = 3$$

$$v_2 = gb(n-1) - p + 1 = 2(2)(5-1) - 3 + 1 = 14$$

$$F_{\text{tabel}} = F_{0,05; 3, 14} = 3,34$$

Karena $F_2 = 4,26 > 3,34 = F_{\text{tabel}}$

Berarti Tolak H_0 .

► Kesimpulan

Terdapat pengaruh yang signifikan dari faktor 2 (*ammount of additive*) terhadap proses *extruding*.