DIKTAT
MATEMATIKA II

(PROGRAMA LINIER)

Drs. A. NABABAN

PURNAWAN, M.T

JURUSAN PENDIDIKAN TEKNIK MESIN

FAKULTAS PENDIDIKAN TEKNOLOGI DAN KEJURUAN

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2004

PROGRAMA LINIER

1. Pendahuluan

Program linier adalah satu cara untuk memecahkan suatu persoalan tertentu, dimana model matematika terdiri atas pertidaksamaan-pertidaksamaan linier yang mempunyai banyak penyelesaian, dipergunakan. Dari semua penyelesaian yang mungkin, satu atau lebih memberikan hasil yang paling baik (openyelesaian optimum).

Masalah program linier adalah masalah minimasi atau maksimasi dari suatu fungi linier dengan himpunan pembatas linier yang berupa pertidaksamaan atau persamaan.

Istilah program linier merupakan masalah pemograman yang memenuhi kondisi-kondisi :

Variabel-variabel keputusan yang terlibat dalam masalah tidak negatif (positif atau nol).

Kriteria pemilihan nilai terbaik dari variasi keputusan dapat ditentukan dengan fungsi linier dari variabel-variabel tersebut. Fungsi kriteria ini disebut fungsi objektif atau fungsi tujuan.

Aturan operasi mengatur proses karena langkanya sumber, dapat digambarkan sebagai himpunan persamaan atau pertidaksamaan linier. Himpunan ini disebut himpunan pembatas.

2. Prosedur

Langkah-langkah penyelesaian program linier adalah sebagai berikut :

Terjemahkan soal kedalam matematika :

Bentuklah model matematika yang terdiri atas system pertidaksamaan atau persamaan :

$$
\begin{array}{ll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 & (= b_1;\leq b_1) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 & (= b_2;\leq b_2) \\
\;\;. \qquad . \qquad \ldots \qquad . \quad . & \\
\;\;. \qquad . \qquad \ldots \qquad . \quad . & \\
\;\;. \qquad . \qquad \ldots \qquad . \quad . & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \geq b_n & (= b_n;\leq b_n)
\end{array}
$$

Indeks ke-I menunjukkan pembatas ke-I, demikian juga indeks ke-j. Pembatas $x_1,x_2,\ldots,x_n \geq 0$ atau pembatas $x_j \geq 0$ adalah pembatas non negative, koefisien a_{ij} disebut koefisien teknologi yang membentuk matriks pembatas :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Vektor ruas kanan atau vektor kolom b_i disebut vektor kebutuhan.

Bentuklah fungsi objektif atau fungsi tujuan:

$C_1x_1 + c_2x_2 +. . .+c_nx_n$, yang biasa disebut P :

Atau P = $\sum_{1}^{n} c_j x_j$

Koefisien $c_1, c_2, . . . ,c_n$ adalah koefisien ongkos dan $x_1, x_2, . . .,x_n$ adalah variable (tingkat kegiatan.

Perlihatkan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan pada diagram cartesius, yang membentuk polygon. Titik dalam atau pada batas polygon memberikan penyelesaian yang mungkin.

Pilihlah titik-titik yang menberikan penyelesaian yang paling baik (optimum) dengan menyelidiki titik-titik

III.ASUMSI-ASUMSI UNTUK PROGRAMA LINIER

Untuk menunjukkan masalah optimasi sebagai programa linier diperlukan beberapa asumsi : dalam daerah penyelesaian kepada fungsi objektif atau fungsi tujuan berkenaan dengan minimasi dan maksimasi.

3.1 Proporsionalitas

Ditentukan variable x_j, kontribusinya pada biaya atau keuntungan adalah c_j x_j, dan kontribusinya terhadap pembatas ke-I adalah aijxj. Ini berarti bila x_j makin besar/kecil, maka kontribusinya ke ongkos dank e tiap pembatas makin besar/ kecil juga. Misalnya jika x_j adalah jumlah satuan pembelian dari tempat j dan xj = 10 ton, maka keuntungan dari kegiatan j ini adalah 10cj. Asumsi ini tidak memperhitungkan adanya penghematan yang mungkin muncul sebagai makin besarnya jumlah yang diangkut dengan ongkos yang lebih rendah per unit; atau mungkin lebih mahal ongkos angkutnya.

3.2 Addivitas

Total ongkos atau keuntungan adalah jumlah dari ongkos-ongkos atau keuntungan-keuntungan satuan, dan total kontribusi terhadap pembatas ke-I adalah jumlah kontribusi satuan dari tiap kegiatan.

3.2 Divisibility

Variabel keputusan dapat dibagi kedalam pecahan sehingga dapat diperoleh nilai-nilai yang tidak bulat.

Suatu masalah pemograman dapat dirumuskan ke dalam persoalan programa linier bila asumsi-asumsi di atas dipenuhi.

IV BENTUK-BENTUK KANONIK DAN STANDARD

Karakteristik bentuk kanonik adalah :

a. Semuavariabel keputusan adalah non negative.
b. Semua fungsi pembatas berbentuk pertidaksamaan (≥,≤).
c. Fungsi objektif atau fungsi tujuan berjenis maksimasi.

Bentuk matematika dari bentuk kanonik ini adalah :

Bentuk persoalan program linier beraneka ragam, tetapi bentuk-bentuk tersebut dapat dimodifikasi ke dalam bentuk kanonik dengan transformasi elementer:

4.1 Fungsi minimasi secara matyematika ekivalen dengan maksimasi dari gambaran negatif fungsi itu.

Misalnya minimasi $P = c_1 x_1 + c_2 x_2$……………………..ekivalen dengan minimasi

4.2 Pertidaksamaan satu puhak ≤ atau dapat diubah arahnya (pihanya) menjadi berlawanan dengan mengalikan kedua sisi (ruas) pertidaksamaan dengan -1.

4.3 Sebuah persamaan dapat diganti dengan dua persamaan dengan arah yang berlawanan

4.4 Sebuah pertidak samaan dengan ruas kiri berada dalam tanda harga mutlak dapat diubah ke dalam bentuk pertidaksamaan biasa. Untuk b>0, pembatas.

4.5 Sebuah variable yang tidak dibatasi tanda, artinya boleh negatif, nol atau positif, ekivalen dengan selisih antara dua variable non negatif. Misalnya jika x1 tidak dibatasi tanda, maka x1 dapat diganti dengan (y_1-y_2) dimana y_1 dan y_2 variabel non negatif.

Karakteristik dari bentuk standard adalah :

a. Semua pembatas berupa persamaan, kecuali pembatas non negatif.
b. Elemen ruas kanan tiap pembats adalah non negatif.
c. Semua variable non negatif.
d. Fungsi tujuan berjenis maksimasi atau minimasi.

Pembatas yang berbentuk pertidaksamaan dapat diubah menjadi persamaan dengan menambah atau mengurangi ruas kiri dengan suatu variable non negatif. Variabel baru ini disebut “slack variable”, yang harus ditambah ke ruas kiri bila bentuk persamaan ≤, dan dikurangi dari ruas kiri bila bentuk pertidaksamaan ≥. Misalnya pembatas

V. PROGRAMA LINIER DALAM BENTUK MATRIKS

Masalah programa linier dapat dinyatakan dalam bentuk yang lebih sederhana dengan menggunakan notasi matriks.

Untuk memberi gambaran, perhatikanlah:

Minimasi P = $\sum_{1}^{n} c_j x_j$

Dengan memperhatikan $\sum_{1}^{n} a_{ij} x_j = b_j$ (i = 1, 2 ,. . . . , n)

$x_j \geq 0$ (j = 1, 2, . . . , n)

Koefisien c_j = c_1, c_2,. . . . . ., cn dapat digambarkan sebagai suatu vector basis C, dan semua variable keputusan, ruas kanan dan koefisien pembatas dapat digambarkan seperti:

Variabel keputusan

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ .x_n \end{pmatrix} \text{ ruas kanan } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Dan koefisien pembatas } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Maka matriks persoalan dio atas dapat ditulis minimasi P = Cx, dengan memperhatikan Ax = B dengan aij

Contoh :

Seorang peternak ayam petelur harus memberi makanan untuk tiap 50 ekor/hari paling sedikit 150 unit zat A dan 200 unit zat B. Zat-zat tersebut tidak dapat dibeli dalam bentuk murni, melainkan teerdapat dalam makanan ayam M_1 dan M_2. Tiap kg makanan ayam M_1 mengandung 30 unit zat A dan 20 unit zat B, dan makanan M_2 mengandung 20 unit zat A dan 40 unit zat B. Jika harga M_1 : Rp.225/kg dan harga M_2 : Rp.250/kg, dan tiap ekor membutuhkan 125 gr makanan/hari ; berapakah banyaknya makanan M_1 dan M_2 harus dibeli tiap hari untuk 1000 ekor ayam petelur, supaya harganya semurah-murahnya dan kebutuhan akan zat-zat itu dipenuhi?

Jawab: untuk memformulasikan persoalan di atas, ada beberapa hal yang harus ditanyakan sebagai langkah-langkah pemecahan:

1) Apa variable keputusan dari persoalan di atas?
2) Apa tujuan dari persoalan ini?
3) Apa yang menjadi pembatas-pembatasnya?

1)Variabel keputusan dari persoalan ini adalah jumlah bahan makanan yang akan dipergunakan.

2)Tujuan persoalan ini memininmumkan biaya dengan pembatas jumlah yang dibutuhkan tiap hari 125 kg makanan (M_1 dan M_2) / 1000 ekor.

3) Pembatas pertama adalah ketentuan kebutuhan. Pembatas kedus ditentukan oleh ketentuan zat A. Pembatas ketiga ditentukan oleh ketentuan zat B.

Misalkan variable keputusan x_1 jumlah makanan M_1, dan x_2 jumlah makanan M_2 yang dipergunakan untuk 125 kg makanan, maka model programa linier adalah :

Minimasi $P = 225x_1 + 250x_2$ (1)

Untuk memudahkan menentukan pembatas, dibuat lebih dahulu matriks daari semua yang diketahui :

Bahan makanan	Kandungan unit/ kg		Banyaknya dibeli dalam kg	Harga satuan /kg/Rp	Fungsi Tujuan
	Zat A	Zat B			
M_1	30	20	x_1	225	$P = 225x_1 + 250x_2$
M_2	20	40	x_2	250	
Jumlah	≥ 150	≥ 200	$x_1 + x_2$	$P = 225x_1 + 250x_2$	

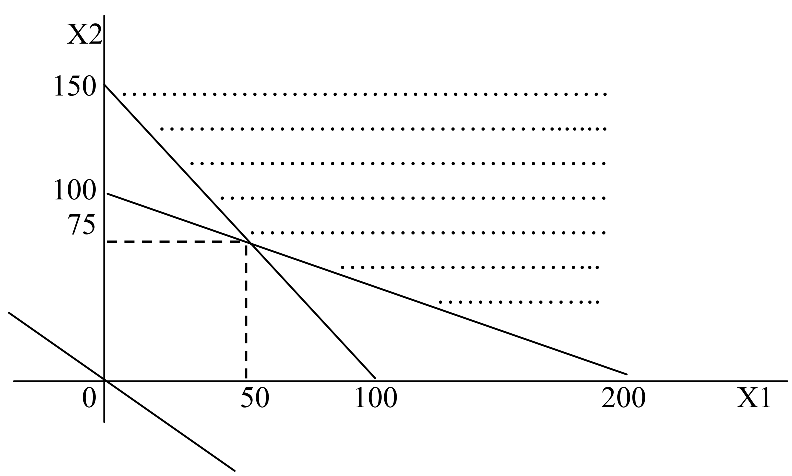
Unruk 50 ekor ayam petelur, sehingga untuk 1000 ekor ayam petelur dibutuhkan 20 kali sebanyak yang tertera dalam daftar . Sekarang pembatas dibuat dalam bentuk pertidaksamaan sebagai berikut :

$x_1 + x_2 = 125$

$30\,x_1 + 20\,x_2 \geq 3000$ (2)

$20\,x_1 + 40\,x_2 \geq 4000$ (3)

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$ (4)



Gambarlah grafik dari :

(1) $P = 225\,x_1 + 250\,x_2$

(2) $30\,x_1 + 20\,x_2 \geq 3000$

(3) $20\,x_1 + 40\,x_2 \geq 4000$

(4) $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$ pada sebuah persumbuan cartesius. Gambarlah polygon yang dibentuk keempat pertidaksamaan itu/persamaan itu.

Minimasi $P = 225\ x_1 + 250\ x_2$ didapat untuk $x_1 = 50$ dan $x_2 = 75$

Soal-soal

1. Sebuah industri rumah tangga membuat 2 jenis alat elektronika yang diproses melalui 3 mesin M_1 ,M_2 dan M_3.Alat elektronika E_1 diproses oleh M_1 dalam 1 menit, 2 menit oleh M_2 dan 1 menit oleh M_3.Jika biaya membuat E_1 Rp. 150,00/unit dan biaya membuat E_2 Rp. 100,00/unit, dan tiap mesin bekerja paling sedikit 8 jam/hari dan agar biaya yang dikeluarkan minimum?
2. Dua jenis logam campuran X dan Y terdiri atas logam A, B, dan C. 1 kg logam campuran X terdiri atas 5 ons logam A, 3 ons logam B, dan 2 ons logam C. 1 kg logam campuran Y terdiri atas 2 ons logam A, 3 ons logam B, dan 5 ons logam C. Logam M dibuat semurah-murahnya dari logam X dan Y, sedemikian sehingga sekurang-kurangnya terdiri atas 6 kg logam A, 7,2 kg logam B, dan 6 kg logam C. Jika harga logam X Rp. 4000,00/kg dan harga logam Y Rp 2000,00/kg, berapakah harga minimum logam campuran M itu?

VI PROGRAMA LINIER DENGAN MATRIKS INVERS

Program linier dapat juga diselesaikan dengan memakai metode matriks invers. Perhatikan contoh di bawah ini :

Maksimasi dari : $P = 68\ x + 70\ y$ dengan pembatas $6\ x + 5y \leq 960$

$10\ x + 11\ y \leq 1760$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{16} & -\frac{5}{16} \\ -\frac{10}{16} & \frac{6}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 960 \\ 1760 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 660 & -550 \\ -600 & 660 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow$ x = 110 ; y = 60 → P = 68 (110) + 70 (60)

= 7480 + 4200 = 11680

Dapat juga diselesaikan dengan operasi baris :

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 960 \\ 1760 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 960 \\ 480 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 960 \\ 60 \end{pmatrix}$$

y = 60 →6x + 5 (60) = 960 →6x = 660→ x = 110

Jadi z = 68 (110) + 70 (60) = 7480 +4200 = 11680

Soal-soal:

Selesaikan soal-soal di bawah ini dengan :

1. Metode Cramer
2. Metode Matriks Invers
3. Metode Operasi baris. Dalam menyelesaikan system persamaan liniers

1. Tentukanlah maksimasi dengan memperhatikan P = 35x + 25y

   $2x + y \leq 7$

   $3x + y \leq 8$

2. Tentukanlah maksimasi dengan memperhatikan P = 25x + 35y

   $2x + y \leq 7$

   $3x + y \leq 12$

3. Tentukanlah maksimasi dengan memperhatikan P = 25x + 35y

   $2x + 3y \leq 15$

   $3x + y \leq 12$

4. Tentukanlah maksimasi dengan memperhatikan P = 35x + 25y

   $2x + 3y \leq 15$

   $3x + y \leq 12$