

DIKTAT MATEMATIKA II

(METODE SIMPLEK)



Drs. A. NABABAN

PURNAWAN, M.T

**JURUSAN PENDIDIKAN TEKNIK MESIN
FAKULTAS PENDIDIKAN TEKNOLOGI DAN KEJURUAN
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA**

2004

METODE SIMPLEKS

Metode simpleks adalah prosedur menilai/mengevaluasi suatu fungsi linear pada titik ekstrim, karena pada tiap langkah hanya titik ekstrim yang membawa lebih dekat pada penyelesaian optimal yang dipilih. Oleh karena itu metode simpleks dapat dipakai mencari penyelesaian program linier.

Contoh : Mencari maksimasi dari $P = 68x + 70y$ dengan memperhatikan

$$6x + 5y \leq 960 ; 10x + 11y \leq 1760 ; x \geq 0 ; y \geq 0$$

Jawab : $6x + 5y \leq 960$, berarti ada bilangan positif r sedemikian sehingga $6x + 5y + r = 960$. $10x + 11y \leq 1760$. berarti ada bilangan positif s sedemikian, sehingga $10x + 11y + s = 1760$. (r dan s disebut slack variable).

Program linier sekarang menjadi :

$$\begin{aligned} \text{Maksimasi :} & \quad P = 68x + 70y \\ \text{dengan memperhatikan} & \quad 6x + 5y + r = 960 \\ & \quad 10x + 11y + s = 1760 \\ & \quad x \geq 0 ; y \geq 0 ; r \geq 0 ; s \geq 0 \end{aligned}$$

Hitung slack variables dari persamaan-persamaan itu :

$$\begin{aligned} r &= 960 - 6x - 5y \\ s &= 1760 - 10x - 11y \end{aligned}$$

Program linier itu sekarang menjadi :

$$\begin{aligned} \text{Maksimasi} & \quad P = 68x + 70y \\ \text{dengan memperhatikan} & \quad r = 960 - 6x - 5y \\ & \quad s = 1760 - 10x - 11y \\ & \quad x \geq 0 ; y \geq 0 ; r \geq 0 ; s \geq 0 \end{aligned}$$

Matriks pertama dari ketiga persamaan pertama adalah :

$$P \begin{pmatrix} & x & y \\ 0 & 68 & 70 \\ r & 960 & -6 & -5 \\ s & 1760 & -10 & -11 \end{pmatrix}$$

Sekarang pilih unsure pivot (proses, paksi). Perhatikan bahwa kolom pertama dari matriks itu memberi nilai P, r dan s apabila $x = 0$ dan $y = 0$.

Misalnya harga P untuk $x = 0$ dan $y = 0$ adalah :

$$P = 68x + 70y = 68(0) + 70(0) = 0$$

Jelas bahwa ini bukan maksimum P yang dicari. Karena koefisien dari y pada fungsi objektif lebih daripada koefisien dari x, cobalah menaikkan harga P dengan menaikkan harga y (sedang x tetap = 0).

Jika $x = 0$, maka

$$P = 70y$$

$$r = 960 - 5y$$

$$s = 1760 - 11y$$

Tampak di sini, bahwa harga P makin besar jika harga y makin besar; tetapi tidak boleh mengambil harga y terlalu besar, karena r atau s mungkin menjadi negative, sedang dyarat $r \geq 0$ dan $s \geq 0$. Minimum $r = 0$, jadi paling besar $y = (960 : 5) = 192$. Minimum $s = 0$, jadi paling besar $y = (1760 : 11) = 160$. Karena r dan s tidak boleh negative, maka harga y yang dipilih adalah $y = 160$. Harga y diperoleh dari $s = 1760 - 10x - 11y$, karena itu unsure pivot dipilih pada baris s dan kolom y, yaitu -11. Jadi matriks pertama dengan unsure pivot adalah :

$$\begin{array}{c}
 P \\
 r \\
 s
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 & x & y \\
 0 & 68 & 70 \\
 960 & -6 & -5 \\
 1760 & -10 & -11^*
 \end{pmatrix}
 \quad * \text{ tanda unsure pivot}$$

Cara mendapatkan unsure pivot dapat ditempuh sebagai berikut :

Tulis fungsi objektif pada baris pertama matriks pertama dan tempatkan konstanta pada kolom pertama :

- 1) Pilih sebagai kolom pivot, kolom konstanta positif terbesar dari baris pertama.
- 2) Pakailah unsure negative dari kolom pivot membagi konstanta pada baris yang bersangkutan (pada baris unsur negative tersebut).
- 3) Pilih baris pivot, yaitu baris yang mempunyai harga mutlak koefisien yang terkecil, yang diperoleh pada langkah kedua di atas.
- 4) Unsur pivot adalah unsure yang terletak pada kolom pivot dan pada baris pivot.

Selanjutnya dicari matriks kedua, yang diperoleh dari matriks pertama sebagai berikut :

- (1) Ganti unsure-unsur yang tidak terletak pada baris dan kolom pivot dengan cross-product-nya.
Cross-product unsure = besarnya determinan $2 \times 2 = (\text{unsure}) \times (\text{pivot}) - (\text{hasil kali unsure-unsur diagonal sampingnya})$, dimana unsure pivot sebagai unsure a_{22} .
- (2) Ganti tanda semua unsure baris pivot, kecuali unsure pivot sendiri.
- (3) Ganti unsure pivot dengan 1 (satu).
- (4) Kalikan matriks baru itu dengan kebalikan unsure pivot (sebelum unsure pivot diganti dengan satu).

Matriks pertama :

$$\begin{array}{l}
 \text{P} \\
 \text{r} \\
 \text{s}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 x \quad y \\
 \left(\begin{array}{ccc}
 0 & 68 & 70 \\
 960 & -6 & -5 \\
 1760 & -10 & -11^*
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Matriks kedua diperoleh dengan mengikuti langkah di atas :

- (1) Langkah pertama :

$$\left(\begin{array}{ccc}
 (0)(-11) - (70)(1760) & (68)(-11) - (70)(-10) & 70 \\
 (960)(-11) - (-5)(1760) & (-6)(-11) - (-5)(-10) & -5 \\
 1760 & -10 & -11
 \end{array} \right) \text{ atau}$$

$$\left(\begin{array}{ccc}
 -123200 & -48 & 70 \\
 -1760 & 16 & -5 \\
 1760 & -10 & -11
 \end{array} \right)$$

- (2) Ganti tanda semua unsure pada baris pivot, kecuali unsure pivot sendiri :

$$\left(\begin{array}{ccc}
 -123200 & -48 & 70 \\
 1760 & -16 & 5 \\
 -1760 & 10 & -11
 \end{array} \right)$$

- (3) Ganti unsure pivot dengan 1 (satu) :

$$\begin{pmatrix} -123200 & -48 & 70 \\ -1760 & 16 & -5 \\ -1760 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) Bagi semua unsure dengan unsure pivot di atas, yaitu dengan -11 :

$$\begin{array}{c} P \\ r \\ y \end{array} \begin{pmatrix} 11200 & \frac{48}{11} & -\frac{70}{11} \\ 160 & -\frac{16}{11} & \frac{5}{11} \\ 160 & -\frac{10}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{array}{c} x \\ s \end{array}$$

Apabila $x = s = 0$. kolom pertama memberi $P = 11200$, $r = 160$ dan $y = 160$. Dari sini $(0, 160)$ salah satu titik ekstrim yang memberi harga $P = 11200$. Matriks pertama memberi harga P pada titik $(0, 160)$. Sekarang semua langkah (prosedur) itu diulang dengan mengambil matriks kedua sebagai matriks pertama, untuk mendapatkan matriks ketiga.

Jika prosedur itu ditempuh, didapatkanlah bahwa kolom x dipilih sebagai kolom pivot, karena harga x itulah bilangan positif terbesar pada baris P . Tentukanlah sekarang baris pivot.

Bagilah 160 dengan $-\frac{16}{11}$ didapat -110 , sedang jika 160 dibagi dengan $-\frac{10}{11}$, didapat -176 .

Karena $-110 < -176$, maka baris r dipilih sebagai baris pivot, dan $-\frac{16}{11}$ sebagai unsure pivot.

Jadi matriks ketiga dengan unsure pivot adalah :

$$\begin{array}{c} P \\ r \\ y \end{array} \begin{pmatrix} 11200 & \frac{48}{11} & -\frac{70}{11} \\ 160 & -\frac{16}{11}^* & \frac{5}{11} \\ 160 & -\frac{10}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{array}{c} x \\ s \end{array}$$

(1) Ganti unsure-unsur yang tidak terletak pada baris dan kolom pivot dengan cross-product-nya.

$$\begin{pmatrix} (1200) \left(-\frac{16}{11}\right) - \left(\frac{48}{11}\right)(160) & \frac{48}{11} & \left(-\frac{70}{11}\right)\left(-\frac{16}{11}\right) - \left(\frac{48}{11}\right)\left(\frac{5}{11}\right) \\ 160 & -\frac{16}{11}^* & \frac{5}{11} \\ (160)\left(-\frac{16}{11}\right) - (160)\left(-\frac{10}{11}\right) & -\frac{1}{11} & \left(-\frac{16}{11}\right)\left(-\frac{1}{11}\right) - \left(\frac{5}{11}\right)\left(-\frac{10}{11}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{186880}{11} & \frac{48}{11} & \frac{80}{11} \\ 160 & -\frac{16}{11} & \frac{5}{11} \\ -\frac{960}{11} & -\frac{10}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

(2) Ganti tanda unsur-unsur pada baris

pivot, kecuali unsure pivot.

$$\begin{pmatrix} -\frac{186880}{11} & \frac{48}{11} & \frac{80}{11} \\ -160 & -\frac{16}{11} & -\frac{5}{11} \\ -\frac{960}{11} & -\frac{10}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

(3) Ganti unsure pivot dengan 1

$$\begin{pmatrix} -\frac{186880}{11} & \frac{48}{11} & \frac{80}{11} \\ -160 & 1 & -\frac{5}{11} \\ -\frac{960}{11} & -\frac{10}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

(4) Bagi semua unsure dengan unsure

pivot sebelum unsure pivot dijadikan

1 (satu), yaitu dengan $-\frac{16}{11}$

$$\begin{matrix} & & x & s \\ P & \left(\begin{array}{ccc} 11200 & -3 & 5 \\ 110 & -\frac{11}{16} & \frac{5}{16} \\ 60 & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \end{array} \right) & & \\ r & & & \\ y & & & \end{matrix} \quad \text{Matriks ini menghasilkan system :}$$

$$P = 11680 - 3r - 5s ; x = 110 - \frac{11}{16} r + \frac{5}{16} s ; y = 60 + \frac{5}{8} r - \frac{3}{8} s$$

Apabila $r = s = 0$, system itu memberi harga $P = 11680$ pada titik ekstrim $(110, 60)$

Contoh : Mencari minimasi $P = 2x + 5Y$ dengan memperhatikan

$$3x + 2y \geq 8 ; x + 4y \geq 6 ; x \geq 0 ; y \geq 0$$

Jawab : Masalah ini equivalent dengan problema : $-P = -2x - 5y$

$3x + 2y \geq 8$ berarti ada sebuah bilangan r sedemikian, sehingga $3x + 2y = 8 + r$.

$x + 4y \geq 6$ berarti ada sebuah bilangan s , sedemikian sehingga $x + 4y = 6 + s ; x \geq 0 ; y \geq 0 ; r \geq 0$ dan $s \geq 0$.

Slack variable r dan s adalah :

$$r = -8 + 3x + 2y$$

$$s = -6 + x + 4y$$

Jika matriks dibentuk dari kedua persamaan ini, maka $r = -8$ dan $s = -6$ jika $x = 0$ dan $y = 0$.

Hal ini bertentangan, bahwa $r \geq 0$ dan $s \geq 0$. Karena itu matriks tidak dapat dibentuk dari persamaan itu, jadi persamaan kedua memnerikan x dalam y dan s , yaitu:

$$x = 6 + s - 4y$$

Substitusikan harga x ini ke dalam persamaan untuk r :

$$r = -8 + 3(6 + s - 4y) + 2y$$

$$r = -8 + 18 + 3s - 10y \quad \text{atau} \quad r = 10 + 3s - 10y$$

Dengan cara yang sama didapat :

$$-P = -2(6 + s - 4y) - 5y$$

$$-P = -12 - 2s + 3y$$

Programa linier sekarang menjadi :

$$\begin{aligned} \text{Maksimasi} \quad & -P = -12 - 2s + 3y \\ \text{dengan memperhatikan} \quad & x = 6 + s - 4y \\ & r = 10 + 3s - 10y \\ & x \geq 0 ; y \geq 0 ; r \geq 0 \text{ dan } s \geq 0 \end{aligned}$$

Sekarang dapat dibentuk matriks :

$$\begin{array}{c} \\ -P \\ x \\ r \end{array} \begin{array}{cc} x & s \\ \left(\begin{array}{ccc} -12 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & -4 \\ 10 & 3 & -10^* \end{array} \right) \end{array}$$

Setelah ditempuh beberapa langkah/prosedur seperti di atas didapat matriks :

$$\begin{array}{c} \\ -P \\ r \\ y \end{array} \begin{array}{cc} x & s \\ \left(\begin{array}{ccc} -9 & -\frac{11}{10} & -\frac{70}{11} \\ 2 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{array} \right) \end{array}$$

Matriks ini menyatakan bahwa $-P = -9$ adalah maksimum untuk $x = 2$ dan $y = 1$. Oleh karena itu $P = 9$ adalah minimum dari fungsi $P = 2x + 5y$ untuk $x = 2$ dan $y = 1$.

Contoh ini menunjukkan, bahwa minimasi fungsi (linier) tujuan P non negative dengan pembatas-pembatas didapat melalui prosedur :

- (1) Minimasi fungsi linier tujuan P yang non negative dengan pembatas-pembatas, diubah pada masalah maksimasi fungsi tujuan ($-P$) dengan pembatas-pembatas yang sama .
- (2) Ambil slack variables untuk mengubah pertidaksamaan menjadi persamaan, kecuali persamaan pembatas non negative.
- (3) Selesaikan persamaan pembatas untuk variable tertentu dalam variable lain, sehingga semua konstanta adalah positif. Langkah ini perlu untuk menentukan pembatas non negative.
- (4) Bentuk matriks dan terapkan metode simpleks untuk maksimasi fungsi $-P$.

(5) Maksimum dari fungsi tujuan - P adalah minimum fungsi tujuan P dengan pembatas yang sama.

Contoh II : Miniasi biaya (Cost)

Sebuah perusahaan M mempunyai 2 buah pabrik I dan II. Pabrik memproduksi 80 ton dan pabrik II memproduksi 110 ton barang. Ada 2 buah gudang A dan B yang bersedia manampung produksinya dengan syarat: Gudang A menampung paling sedikit 70 ton dan gudang B menampung palig sedikit 65 ton. Andaikan biaya kapal dari pabrik I ke gudang A: \$4/ton, dari pabrik II ke gudang A \$5/ton; dari pabrik I ke gudang B \$6/ton dan dari pabrik II ke gudang B \$8/ton. Jika perusahaan ingin biaya kapal minimum, buatlah rencana pengapalan.

Jawab : Misalkan x ton dikapalkan dari pabrik I ke gudang A.

y ton dikapalkan dari pabrik I ke gudang B

z ton dikapalkan dari pabrik II ke gudang A

t ton dikapalkan dari pabrik II ke gudang B.

Fungsi Cost (biaya) = C yang akan diminimumkan adalah :

$$C = \$4x + \$6y + \$5z + \$8t$$

Kenyataan pabrik I hanya memproduksi 80 ton, maka pembatas :

$$x + y \leq 80$$

Pabrik II hanya memproduksi 110 ton, maka pembatas :

$$z + t \leq 110$$

Gudang A menampung paling sedikit 70 ton, maka :

$$x + z \leq 70$$

Gudang b menampung paling sedikit 65 ton, maka :

$$y + t \geq 65$$

Programa linier menjadi :

Minimasi $C = 4x + 6y + 5z + 8t$

Dengan memperhatikan : $x + y \leq 80$

$$z + t \leq 110$$

$$x + z \geq 70$$

$$y + t \geq 65$$

$$x \geq 0 ; y \geq 0 ; z \geq 0 \text{ dan } t \geq 0$$

Programa linier itu ekivalen dengan :

Maksimasi $-C = -4x - 6y - 5z - 8t$

Dengan memperhatikan :

$$x + y \leq 80$$

$$z + t \leq 110$$

$$x + z \geq 70$$

$$y + t \geq 65$$

$$x \geq 0 ; y \geq 0 ; z \geq 0 \text{ dan } t \geq 0$$

Abil slack variables r, s, u dan v sedemikian sehingga :

Maksimasi $-C = -4x - 6y - 5z - 8t$

Dengan memperhatikan :

$$x + y + r = 80$$

$$z + t + s = 110$$

$$x + z = 70 + u$$

$$y + t = 65 + v$$

Ada berbagai cara menyelesaikan system ini, sehingga variable-variabel itu menjadi positif.

Salah satu cara adalah :

Dari persamaan terakhir : $y + t = 65 + v$

Substitusikan pada persamaan pertama : $x = 80 - (65 - t + v) - r$

$$x = 15 - r + t - v$$

Substitusikan harga x ini pada persamaan ketiga, maka :

$$z = 70 - (15 - r + t - v) + u \longrightarrow z = 55 + r - t + v + u$$

Substitusikan harga x ini pada persamaan ke dua, maka :

$$s = 110 - (55 + r - t + v + u) - t \longrightarrow s = 55 - r - v - u$$

Akhirnya substitusikan pada fungsi objektif :

$$-C = -4(15 - r + t - v) - 6(65 + v - t) - 5(55 + r - t + v + u)$$

$$-8t \longrightarrow -C = -725 - r - t - 7v - 5u$$

Sistem yang ekivalen itu adalah :

$$-C = -725 - r - t - 7v - 5u$$

$$x = 15 - r + t - v$$

$$y = 65 + v - t$$

$$z = 55 + r - t + v + u$$

$$s = 55 - r - v - u$$

Matriks pertama adalah :

$$\begin{array}{c}
 -C \\
 x \\
 y \\
 z \\
 s
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 & r & t & v & u \\
 -725 & -1 & -1 & -7 & -5 \\
 15 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
 65 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 55 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 55 & -1 & 0 & -1 & -1
 \end{pmatrix}$$

karena semua unsur dalam baris - C adalah negative, maka matriks memberikan penyelesaian optimal $-C = -725$ pada $r = t = v = u = 0$, dan $x = 15$; $y = 65$; $z = 55$ dan $s = 55$. Oleh karena itu biaya kapal minimum adalah $C = 725$ diperoleh dengan pengapalan : dari pabrik I 15 ton ke gudang A dan 65 ton ke gudang B; dari pabrik II 55 ton ke gudang A dan 55 ton ke gudang B.

Soal : Sebuah perusahaan M mempunyai 2 buah pabrik I dan II. Pabrik I memproduksi 80 ton dan pabrik II memproduksi 110 ton barang. Ada 2 buah gudang A dan B bersedia menampung produksinya, dengan syarat : Gudang A menampung paling sedikit 70 ton dan gudang B menampung paling sedikit 65 ton. Jika perusahaan ingin agar biaya angkut kapal minimum, buatlah rncana pengapalan, dengan tariff biaya angkut kapal dari :

1. Pabrik I ke gudang A : \$4/ton. Pabrik II ke gudang A : \$5/ton.
 Pabrik I ke gudang B : \$6/ton. Pabrik II ke gudang B : \$7/ton.
2. Pabrik I ke gudang A : \$5/ton. Pabrik II ke gudang A : \$4/ton.
 Pabrik I ke gudang B : \$7/ton. Pabrik II ke gudang B : \$6/ton.
3. Pabrik I ke gudang A : \$5/ton. Pabrik II ke gudang A : \$4/ton.
 Pabrik I ke gudang B : \$8/ton. Pabrik II ke gudang B : \$6/ton.
4. Pabrik I ke gudang A : \$5/ton. Pabrik II ke gudang A : \$7/ton.
 Pabrik I ke gudang B : \$4/ton. Pabrik II ke gudang B : \$6/ton.
5. Perusahaan M mempunyai 2 pabrik I dan II. Pabrik I memproduksi 120 ton dan pabrik II memproduksi 150 ton barang. Ada 3 gudang menampung produksinya dengan syarat : Gudang A paling sedikit menampung 100 ton, gudang B paling sedikit menampung 69 ton, dan gudang

C paling sedikit menampung 80 ton. Jika perusahaan ingin agar biaya angkut kapal minimum, dan tariff biaya angkut dari :

Pabrik I ke gudang A : \$1,50/ton. Pabrik II ke gudang A : \$3/ton.

Pabrik I ke gudang B : \$2/ton. Pabrik II ke gudang B : \$3,50/ton.

Pabrik I ke gudang C : \$2,50/ton. Pabrik II ke gudang C : \$4/ton.

6. Pabrik I ke gudang A : \$3/ton. Pabrik II ke gudang A : \$1,50/ton.

Pabrik I ke gudang B : \$3,50/ton. Pabrik II ke gudang B : \$2/ton.

Pabrik I ke gudang C : \$4/ton. Pabrik II ke gudang C : \$2,50/ton.

1. Sebuah perusahaan tambang mempunyai 2 buah tambang. Tambang I memproduksi 2 ton kelas tinggi , 3 ton kelas menengah dan 3 ton kelas rendah tiap jam. Tambang II memproduksi 1 ton kelas tinggi, 2 ton kelas menengah dan 6 ton kelas rendah tiap jam. Perusahaan itu harus menambang 100 ton kelas tinggi, 180 ton kelas menengah dan 240 ton kelas rendah. Jika biaya menambang di tambang I \$250/jam dan biaya menambang di tambang II \$275/jam, berapa jam penambang di tiap tambang itu dilaksanakan agar pesanan dipenuhi dan biaya minimum?