DIKTAT
MATEMATIKA II

(DETERMINAN)

Drs. A. NABABAN

PURNAWAN, M.T

JURUSAN PENDIDIKAN TEKNIK MESIN

FAKULTAS PENDIDIKAN TEKNOLOGI DAN KEJURUAN

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2004

DETERMINAN

I. Pengertian

Susunan bilangan-bilangan yang diatur menurut baris dan kolom yang sama banyaknya ditulis di antara sepasang garis tegak, disebut determinan.

Contoh :
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Dinamai determinan ordo **4 x 4** = $\mathbf{D_{4x4}}$

Tiap bilangan dalam determinan (di antara kedua garis tegak) dinamai unsure atau elemen determinan. Determinan biasanya dinyatakan dengan huruf besar, sedang unsure yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j dinyatakan dengan a_{ij} jadi $\mathbf{a}_{23}$ adalah unsur dari baris ke dua dan kolom ke tiga.

Sebuah determinan **n x n** ditulis :

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinan ini disebut determinan berordo **n x n**

Perhatikan determinan D di atas, $\mathbf{a_{11}}$ $\mathbf{a_{22}}$ $\mathbf{a_{33}}$ .... $\mathbf{a_{nn}}$ disebut unsur-unsur diagonal utama, sedang unsur-unsur $\mathbf{a_{1n}}$ $\mathbf{a_{2(n-1)}}$ .... $\mathbf{a_{n1}}$ disebut unsur-unsur diagonal samping.

Dua buah determinan yang sama ordonya adalah sama jika dan hanya jika unsur-unsurnya yang sepadan sama besarnya.

$$\mathbf{D_1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \mathbf{D_2} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$\mathbf{D_1 = D_2}$ jika dan hanya jika $\mathbf{a_{11} = b_{11}}$; $\mathbf{a_{12} = b_{12}}$; $\mathbf{a_{13} = b_{13}}$**;** ordonya tidak mungkin sama.

Determinan adalah sebuah besaran. besarnya determinan **n x n** adalah sebuah bilangan sebagai hasil penjumlahan dari **n!** suku. Tiap suku adalah hasil perkalian unsur-unsur determinan yang tidak terletak sebaris dan tidak sekolom (tidak ada 2 unsur yang terletak dalam satu baris dan tidak ada dua unsur yang terletak dalam satu kolom pada satu suku, misalnya $\mathbf{a_{12}\ a_{21}\ a_{33}}$).

Ingat **:** Indeks pertama menyatakan baris dan indeks kedua menyatakan kolom.

DEFINISI **:** Besarnya determinan **2x2** adalah hasil kali unsur-unsur diagonal utama dikurangi dengan hasil kali unsur-unsur diagonal samping.

$$D_{2x2} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Banyak suku dari determinan ordo **2x2** adalah **2!**, yaitu **ad** (hasilkali unsur-unsur diagonal utama) dan **bc** (hasilkali unsur-unsur diagonal samping). Banyak suku dari determinan **3x3** adalah **3!**, yaitu **6** suku, dan tiap suku adalah hasilkali **3** unsur determinan yang terletak pada baris dan kolom yang berlainan. Determinan ordo **3x3** dapat dihitung dengan metoda SARRUS. sarrus menuliskan unsur-unsur kolom pertama dan unsur-unsur kolom kedua di luar garis tegak sebelah kanan determinan dalam urutan semula.

Contoh :

$$D = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right| = \begin{matrix} a_{11}a_{12}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix}$$

Unsur-unsur pada diagonal utama dikalikan dengan tanda positif, demikian juga unsur-unsur pada diagonal // diagonal utama. Unsur-unsur pada diagonal samping dikalikan dengan tanda negative, demikian juga unsur-unsur pada diagonal // diagonal samping. Semuanya harus lengkap tiga unsur (yang tidak lengkap tidak dikalikan).

Metode SARRUS ini hanya dapat dipakai untuk menghitung besarnya determinan ordo **3x3**. Jadi banyaknya suku dari determinan **n x n** adalah **n!**.

II. MINOR

Tiap unsur determinan ordo **n x n** mempunyai minor yang merupakan determinan ordo **(n-1) x (n-1)**. Minor unsur a_{ij} ditulis M_{ij} adalah determinan yang diperoleh dari determinan **Dnxn** tanpa baris ke-I dan tanpa kolom ke-j. Jadi **Mij** adalah determinan ordo **(n-1) x (n-1)**.

Contoh : M_{23} **dari** D_{4x4} $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ = **adalah** D_{3x3}

Yaitu determinan **3x3** yang didapat dari determinan pertama **4x4** tanpa baris **2** dan tanpa kolom **3** :

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Menghitung besarnya determinan dapat dilakukan dengan menggunakan minor unsur-unsur dari satu baris atau unsur-unsur dari satu kolom. besarnya D_{3x3} di atas dapat dihitung menurut unsur-unsur baris ke-2 :

$$D_{3x3} = a_{21}(-1)^{2+1} M_{21} + a_{22}(-1)^{2+2} M_{22} + a_{23}(-1)^{2+3} M_{23}$$

$$= -\ a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -\ a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

$$= -\ a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{23}a_{11}a_{32} +$$
$$a_{23}a_{12}a_{31}$$

III. KOFAKTOR

Kofaktor dari unsur a_{ij} ditulis Aij dan besaernya adalah $|A\ ij| = (-1)^{i+j}\ |Mij|$. Menghitung besarnya sebuah determinan dapat juga dengan menggunakan kofaktor. menyelesaikan $D3_{x3}$ menurut unsur-unsur baris 2 dengan menggunakan kofaktor adalah :

$$D_{3x3} = a_{21}A_{22} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$
$$= a_{21}(-1)^{2+1}M_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}M_{22} + a_{23}(-1)^{2+3}M_{23}$$

$$= -\ a_{21} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Sama dengan yang di atas. Periksalah !

Besarnya determinan Dnxn dapat dihitung dengan memakai **KOFAKTOR.** caranya sama dengan di atas, menyelesaikan determinan menurut unsur-unsur dari satu baris atau unsur-unsur dari satu kolom. Tiap unsur itu dikalikan dengan kofaktornya kemudian dijumlahkan.

SOAL :

1. Hitunglah besarnya determinan berikut dengan metoda Sarrus dan dengan memakai kofaktor :

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \quad ; \quad B = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} \quad ; \quad C = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Hitunglah besarnya determinan di bawah ini :

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

3. Hitunglah akar-akar persamaan :

$$\text{a.} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = 0 \; ; \quad \text{b.} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 3 & 2x & x+1 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = 0 \; ; \quad \text{c.} \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Tunjukkan bahwa :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (z - x)\,(z - y)\,(y - x)$$

IV. SIFAT-SIFAT OPERASIONAL DETERMINAN

Sifat 1 : Dua buah determinan tidak boleh dijumlahkan atau dikurangkan walaupun ordonya sama.

Bukti :
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$(15-2) + (3-8) \neq (32-18) \quad \text{atau} \quad 13-5 \neq 14$$

Sifat 2 : Dua determinan yang sama ordonya dapat dikalikan, dan didapat sebuah determinan yang ordonya sama dengan yang pertama.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{x} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}a_{33} \end{vmatrix}$$

Contoh **:**
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \text{X} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 27 \text{ x } 4 = 108$$

$$\begin{vmatrix} 3.2 + 2.4 + 4.3 & 3.4 + 2.2 + 4.5 & 3.3 + 2.5 + 4.4 \\ 5.2 + 3.4 + 2.3 & 5.4 + 3.2 + 2.5 & 5.3 + 3.5 + 2.4 \\ 3.2 + 4.4 + 5.3 & 3.4 + 4.2 + 5.5 & 3.3 + 4.5 + 5.4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 26 & 36 & 35 \\ 28 & 36 & 38 \\ 37 & 45 & 49 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 26 & 36 & 35 \\ 28 & 36 & 38 \\ 37 & 45 & 49 \end{vmatrix} \begin{matrix} 26 & 36 \\ 28 & 36 \\ 37 & 45 \end{matrix} \begin{matrix} \\ = 4586 + 50616 + 44100 + 46620 + 44460 - 49392 \\ = 108 \end{matrix}$$

PERHATIAN :

1) Dua buah determinan yang tidak sama ordonya, tidak boleh dikalikan satu dengan yang lain.
2) $D \text{ x } D = D^2$; $D \text{ x } D^2 = D^3$; dan seterusnya.

Sifat 3 : Baris dan kolom dari sebuah determinan dapat dipertukarkan (baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris) dengan urutan yang sama.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{I} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{d} & \mathbf{g} \\ \mathbf{b} & \mathbf{e} & \mathbf{h} \\ \mathbf{c} & \mathbf{f} & \mathbf{i} \end{vmatrix} = \mathbf{aei + bfg + cdh - ceg - dbi - afh}$$

Perhatian : Determinan kedua disebut determinan transpose dari determinan pertama. Jika pertama D, maka determinan kedua ditulis D^T.

Sifat 4 : Jika dua baris (kolom) dipertukarkan, maka tanda determinan berubah (harganya berlawanan : D dan –D).

$$\begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{e} & \mathbf{d} & \mathbf{f} \\ \mathbf{h} & \mathbf{g} & \mathbf{i} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i} \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathbf{D_1} &= \mathbf{bdi + afh + ceg - cdh - aei - bfg} \\ \mathbf{D_2} &= \mathbf{aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh} \end{aligned}$$

Suku-suku kedua determinan itu berlawanan (berlainan tanda).

Sifat 5 : Determinan yang mempunyai dua baris (kolom) sama, besarnya adalah 0 (nol).

Bukti :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{d} & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & \mathbf{g} & \mathbf{h} \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{a} & \mathbf{a} \\ \mathbf{d} & \mathbf{d} \\ \mathbf{g} & \mathbf{g} \end{matrix} = \mathbf{adh + afg + cdg - cdg - cdh - adh - afg = 0}$$

Sifat 5 ini dapat juga dibuktikan dengan menukarkan kedua kolom (baris) yang sama itu. $D = -D \rightarrow 2D = 0 \rightarrow D = 0$.

Sifat 6 : Jika unsur dari satu baris (kolom) dikalikan dengan **k**, maka besarnya determinan itu sama dengan **k** kali besarnya semula.

Bukti **:**

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{kb} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{ke} & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & \mathbf{kh} & \mathbf{i} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= \mathbf{kaei + kbfg + kcdh - kceg - kebdi - kafh} \\ &= \mathbf{k\,(aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh)} \end{aligned}$$

Lihat determinan D_2 pada sifat 4 di atas.

Sifat 7 : Hasil kali unsur-unsur dari satu baris (kolom) dengan kofaktor unsur-unsur baris (kolom) lain berjumlah 0 (nol).

Bukti : $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = -a_{11}M_{21} + a_{12}M_{22} - a_{13}M_{23}$

$$= -\ \mathbf{a_{11}} \begin{vmatrix} \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix} + \mathbf{a_{12}} \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix} - \mathbf{a_{13}} \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} \end{vmatrix}$$

$= -a_{11}\ (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}\ (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}\ (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$

$= -a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{11}a_{33} - a_{12}\,a_{13}a_{31} - a_{13}a_{11}a_{32} + a_{13}a_{12}a_{31} = 0$

Sifat B : Suatu determinan yang unsur-unsurnya dalam satu baris (kolom) merupakan suku dua dalam bentuk $x_i + y_i$, maka determinan itu dapat ditulis sebagai jumlah dari 2 determinan, sedemikian sehingga determinan kedua mempunyai satu baris (kolom) unsur y_i dan unsur-unsur baris (kolom) lain tetap.

$$\begin{vmatrix} X_1+Y_1 & Z_1 & U_1 \\ X_2+Y_2 & Z_2 & U_2 \\ X_3+Y_3 & Z_3 & U_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 & U_1 \\ X_2 & Z_2 & U_2 \\ X_3 & Z_3 & U_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 & U_1 \\ Y_2 & Z_2 & U_2 \\ Y_3 & Z_3 & U_3 \end{vmatrix}$$

Sifat 9 : Suatu determinan yang unsur-unsurnya pada tiap baris (kolom) merupakan kombinasi linier dari unsur-unsur baris-baris (kolom-kolom) lain, maka besar determinan itu adalah 0 (nol).

$$\begin{vmatrix} ka+mb & a & b \\ kd+me & d & e \\ kf+mg & f & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka & a & b \\ kd & d & e \\ kf & f & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} mb & a & b \\ me & d & e \\ mg & f & g \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & a & b \\ d & d & e \\ f & f & g \end{vmatrix} +$$

$$+ m \begin{vmatrix} b & a & b \\ e & d & e \\ g & f & g \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

(Ingat : Determinan yang mempunyai dua baris/kolom sama besarnya 0 (nol))

Sifat 10 : Semua unsur dari satu baris (kolom) dapat dikalikan dengan sebuah bilangan dan ditambahkan pada unsur-unsur baris (kolom) lain.

$$\begin{vmatrix} a+kb+mc & b & c \\ d+ke+mf & e & f \\ g+kh+mi & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} +k \begin{vmatrix} b & b & c \\ e & e & f \\ h & h & i \end{vmatrix} +m \begin{vmatrix} c & b & c \\ f & e & f \\ i & h & i \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

- ❖ Karena kedua determinan terakhir masing-masing = 0.

SOAL :

Selesaikan dengan menggunakan sifat-sifat determinan :

1.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad ;B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} \quad ;C = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad ;E = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Diketahui determinan-determinan :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad ;B = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad ;C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

a. Tentukan determinan A x B ; B x A ; (AxB) x C ; (A x C) x B ; A x (BxC).

b. Hitunglah besarnya determinan-determinan A, B dan C demikian juga determinan-determinan pada a, dan periksalah kebenarannya.

3. Tunjukkan bahwa :

$$\begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix} = 4\,(a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2)$$

4. Buktikan bahwa luas segitiga ABC dengan titik-titik sudut A (x1,y1) ; B (x2,y2) dan C(x3,y3) adalah :

$$L = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} x1...y1...1 \\ x2...y2...1 \\ x3...y3...1 \end{matrix} \right\|$$

- Kemudian hitunglah luas segitiga ABC, jika A(2,3) ; B(5,-7) dan C(9,-3).

5. Jika garis lurus g_1 : $a_1x + b_1y + c_1 = 0$;

g_2 : $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ dan $g_3 = a_3x + b_3y + c_3 = 0$ melalui satu titik, maka :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Buktikan

6. Sebutkanlah, apa yang dinyatakan oleh persamaan-persamaan di bawah ini :

a. $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b. $$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

c. $$\begin{vmatrix} x_2 + y_2 & x & y & 1 \\ 17 & -1 & -4 & 1 \\ 45 & 3 & -6 & 1 \\ 53 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. Buktikanlah bahwa :

$$\begin{vmatrix} 1 + a_1 & a_2 & a_3 \;.\;.\;.\;. & a_n \\ a_1 & 1 + a_2 & a_3 \;.\;.\;.\;. & a_n \\ . & . & . \;.\;.\;.\;. & . \\ . & . & . \;.\;.\;.\;. & . \\ a_1 & a_2 & a_3 \;.\;.\;.\;. & . \end{vmatrix} = 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

V. SISTEM PERSAMAAN LINIER

Suatu persamaan linier berbentuk :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots . + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots . + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad \ldots . \qquad . \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad \ldots . \qquad . \qquad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots . + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

CRAMER memberikan cara menyelesaikan system persamaan linier ini sebagai berikut

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . \; . \; . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . \; . \; . & a_{2n} \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . \; . \; . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & . \; . \; . & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & . \; . \; . & a_{2n} \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & . \; . \; . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & . \; . \; . & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & . \; . \; . & a_{2n} \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & . \; . \; . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & . \; . \; . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & . \; . \; . & a_{2n} \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & . \; . \; . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . \; . \; . & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . \; . \; . & b_2 \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . \; . \; . & b_n \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{D1}{D} \quad ; \quad x_2 = \frac{D2}{D} \quad ; \quad x3 = \frac{D3}{D} \quad ; \quad . \; . \; . \; . \quad ; \quad x_n = \frac{Dn}{D}$$

CATATAN :

1. Jika $D \neq 0$, didapat n buah akar yang berlainan, yaitu x_1 , x_2 , x_3 , . . . , x_n.
2. Jika $D = 0$, berarti bahwa salah satu persamaan itu adalah kombinasi linier dari beberapa persamaan lain. Oleh karena itu system persamaan itu dapat diselesaikan dengan (n – 1) buah persamaan sembarang diantara n buah persamaan yang diberikan. Jika p (pers 1) + q (pers 2) + . . . + r (pers ke n – 1) = k (pers n) maka akar-akar x_1 , x_2 , x_3 , . . . , x_{n-1} dinyatakan dengan x_n . atau akar-akar dinyatakan dengan $x_?$, dan sebagainya.

SOAL !!!

1. Selesaikan sistem persamaan :

a.
$$\begin{aligned} 6x + 2y - 5z &= 13 \\ 3x + 3y - 2z &= 13 \\ 7x + 5y - 3z &= 26 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 6 \\ x + 2y + z &= 3 \end{aligned}$$

2. Selesaikan sistem persamaan :

a.
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 12 \\ 3x + 2y + 3z &= 16 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 3x + y + z + 2u &= 2 \\ 2x + y - z - u &= 8 \\ x + 2y - 2z - u &= 4 \\ x + 3y + 2z - 2u &= 7 \end{aligned}$$

3. Selesaikan sistem persamaan :

a.
$$\begin{aligned} x - y - 3z - u &= 1 \\ 2x + 4y - 2u &= 2 \\ 3x + 4y - 2z + u &= 0 \\ x + 2z - 3u &= 3 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 6 \\ x + 2y + 3z + u &= 2 \\ 3x + y + z + 2u &= 6 \\ 2x + 3y + 2z - u &= 2 \end{aligned}$$