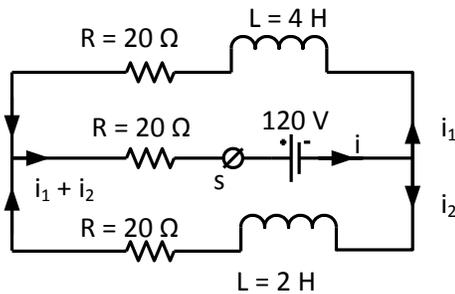


Kerjakan soal-soal berikut dengan baik, rapih, tertib dan benar

1. Setelah digunakan selama 500 jam, kekentalan oli pelumas SAE 40, turun menjadi 80%. Bila laju penurunan kekentalan proporsional terhadap jam kerjanya, dan oli pelumas harus diganti bila kekentalannya mencapai 40%. Buatlah model matematis dari fenomena ini dan hitung waktu pakai oli pelumas tersebut

2.



Tentukan kuat arus yang mengalir pada tiap cabang untuk $t > 0$, pada rangkaian listrik seperti gambar disamping, apabila saklar s ditutup.

3. Tali tergantung pada pasak dengan panjang masing-masing 8 m dan 12 m pada tiap sisinya. Bila tali m Kg setiap meternya, tentukanlah waktu agar tali lepas dari pasak bila gesekan diabaikan.
4. Poros horizontal sepanjang 1 meter ditumpu pada kedua sisinya. Carilah persamaan lendutan yang terjadi dan hitung maksimumnya lendutan maksimumnya, bila beban merata poros q N/m dan modulus elastic sebesar E N/m² dan momen inersianya sebesar I m⁴
5. Tangki setinggi h meter dengan luas penampang A m² terisi penuh oleh air. Bila dasar tangki diberi lubang seluas a m² tentukanlah waktu agar air dalam tangki tersebut keluar seluruhnya.

Kisi-Kisi Soal Matematika Teknik

No	Pokok Bahasan	Kompetensi Dasar	No Soal	Ket
1	Model PD ordo satu	<ul style="list-style-type: none"> • Dapat merakit hubungan antar variabel untuk membuat PD ordo satu • Dapat menyelesaikan PD ordo satu melalui pembuatan model matematik 	1	
2	Penyelesaian PD yang simultan	<ul style="list-style-type: none"> • Dapat membuat PD simultan melalui skets rangkaian listrik yang dihadapinya • Dapat membuat persamaan diferensial dalam bentuk operator diferensial • Dapat menyelesaikan PD aturan Kramer • Dapat mengerjakan soal baik dan benar 	2	
3	Menggunakan hukum-hukum fisika dalam menyelesaikan PD	<ul style="list-style-type: none"> • Dapat membentuk PD dari fenomena yang berhubungan dengan hukum-hukum fisika • Mampu menyelesaikan soal-soal PD dalam bentuk hukum-hukum keseimbangan 	3	
4	Membuat PD dalam bentuk fenomena aliran fluida	<ul style="list-style-type: none"> • Dapat mengalihkan hukum-hukum kesamaan gerakan fluida kedalam bentuk PD • Dapat menyelesaikan persoalan yang dikembangkan dari fenomena aliran fluida 	5	
5	Penggunaan PD dalam fenomena lendutan poros/balok	<ul style="list-style-type: none"> • Mampu menerjemahkan bentuk lendutan kemodel matematik (PD) • Mampu menyelesaikan masalah lendutan poros yang ditumpu pada kedua ujungnya 	4	

5 { 1. Jawab : soal mengatakan interaksi antar variabel proporsi kekentalan oli pelumas SAE 40 terhadap waktu kerjanya. Untuk v = kekentalan (viskositas), t = waktu. Model matematik yang dapat dibuat adalah

$$\frac{dv}{dt} = kv$$

Penyelesaian : $\frac{dv}{v} = k dt$

$$\ln v = kt + \ln c$$

Model matematis : $v(t) = c e^{kt}$

Syarat batas $\left. \begin{array}{l} 1. t = 0 \\ v = 100\% \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 = c e^0 \\ c = 1 \end{array}$

$$v(t) = e^{kt} \quad \text{jawaban umum}$$

10 { $\left. \begin{array}{l} 2. t = 500 \\ v = 80\% = 0,8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0,8 = e^{k \cdot 500} \\ \ln 0,8 = 500 k \end{array}$

$$k = -0,00045$$

$$v(t) = e^{-0,00045 t}$$

3. $t = ?$

$$v = 40\% = 0,40 \quad 0,40 = e^{-0,00045 t}$$

$$\ln 0,40 = -0,00045 t$$

$$t = 2036,20 \approx 2036 \text{ jam}$$

15 { jadi masa pakai oli pelumas SAE 40 adalah 2036 jam

2. Jawab : (lihat gambar) soal menyatakan intruksi antara kuat arus i terhadap waktu.

PD pada loop I (bawah): $2 \frac{di_2}{dt} + 10i_2 + 20(i_1 + i_2) = 120$

$$\frac{di_2}{dt} + 5i_2 + 10i_1 + 10i_2 = 60$$

$$10i_1 + (D + 15)i_2 = 60 \dots\dots\dots(1)$$

5 { PD pada loop II (atas): $4 \frac{di_1}{dt} + 20i_1 + 20(i_1 + i_2) = 120$

$$\frac{di_2}{dt} + 5i_1 + 5i_1 + 5i_2 = 30$$

$$\frac{di_2}{dt} + 10i_1 + 5i_2 = 30$$

$$(D + 10)i_1 + 5i_2 = 30 \dots\dots\dots(2)$$

Bentuk matrik:

$$\begin{vmatrix} 10 & (D+15) \\ (D+10) & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 60 \\ 30 \end{vmatrix}$$

$$i_1 = \frac{\text{Det} \begin{vmatrix} 60 & (D+15) \\ 30 & 5 \end{vmatrix}}{\text{Det} \begin{vmatrix} 10 & (D+15) \\ (D+10) & 5 \end{vmatrix}} = \frac{300 - (D+15)\{30\}}{50 - (D^2 + 25D + 150)} = \frac{300 - 450}{-(D^2 + 25D + 100)} = \frac{150}{D^2 + 25D + 100}$$

$$(D+20)(D+5)i_1(t) = 150$$

Missal: $u = (D+5)i_1(t)$

$$(D+20)u = 150$$

$$\frac{du}{dt} + 20u = 150 \quad \times e^{20t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{20t} u) = 150 e^{20t}$$

$$e^{20t} u = 7,5 e^{20t} + c_1$$

$$u = 7,5 + c_1 e^{-20t}$$

$$(D+5)i_1(t) = 7,5 + c_1 e^{-20t}$$

$$\frac{di}{dt} + 5i_1 = 7,5 + c_1 e^{-20t} \quad \times e^{5t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{5t} i_1) = 7,5 e^{5t} + c_1 e^{-15t}$$

$$e^{5t} i_1 = 1,5 e^{5t} - \frac{c_1}{15} e^{-15t} + c_2$$

$$i_1(t) = 1,5 - \frac{c_1}{15} e^{-20t} + c_2 e^{-5t}$$

Syarat batas:

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \\ i_1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 = 1,5 - \frac{c_1}{15} + c_2 \\ c_1 - c_2 = 22,5 \dots \dots \dots (1) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \\ \frac{di}{dt} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{di}{dt} = \frac{20 c_1}{15 c_1} e^{-20t} - 5 c_2 e^{-5t} \\ 0 = \frac{20}{15} c_1 - 5 c_2 \\ c_1 = \frac{75}{20} c_2 \dots \dots \dots (2) \end{array}$$

Subtitusikan ke (1)

$$\frac{75}{20} c_2 - 15 c_2 = 22,5$$

$$-11,25 c_2 = 22,5$$

$$c_2 = -2$$

$$c_1 = -7,5$$

Didapat : $i_1(t) = 1,5 + 0,5 e^{-20t} - 2 e^{-5t}$

25

b.
$$i_2(t) = \frac{\text{Det} \begin{vmatrix} 10 & 60 \\ (D+10) & 30 \end{vmatrix}}{D^2 + 25D + 100}$$

$$= \frac{300 - (D+10)\{60\}}{D^2 + 25D + 100}$$

$$i_2 = \frac{300 - 600}{(D+20)(D+5)} = \frac{-300}{-(D+20)(D+5)}$$

$$(D + 20)(D + 5)i_2 = 300$$

Misal
$$u = (D + 5)i_2$$

$$(D + 20)u = 300$$

$$\frac{du}{dt} + 20u = 300 \quad \times e^{20t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{20t} u) = 300 e^{20t}$$

$$e^{20t} u = 15 e^{20t} + c_1$$

$$u = 15 + c_1 e^{-20t}$$

$$(D + 5)i_2 = 15 + c_1 e^{-20t} \quad \times e^{5t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{5t} i_2) = 15 e^{5t} + c_1 e^{-15t}$$

$$e^{5t} i_2 = 3e^{5t} - \frac{c_1}{15} e^{-15t} + c_2$$

$$i_2(t) = 3 - \frac{c_1}{15} e^{-20t} + c_2 e^{-5t}$$

Syarat batas:

$$\left. \begin{matrix} t = 0 \\ i_2 = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 0 = 3 - \frac{c_1}{15} + c_2 \\ c_1 - 15c_2 = 45 \dots\dots\dots (1) \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} t = 0 \\ \frac{di}{dt} = 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \frac{di}{dt} = \frac{20}{15} c_1 e^{-20t} - 5c_2 e^{-5t} \\ 0 = \frac{10}{15} c_1 - 5c_2 \\ c_1 = \frac{75}{20} c_2 \dots\dots\dots (2) \end{matrix}$$

Substitusikan ke (1)

$$\frac{75}{20} c_2 - 15c_2 = 45$$

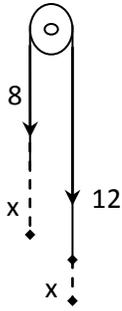
$$- 11,25 c_2 = 45$$

$$c_2 = -4$$

$$c_1 = -15$$

Didapat:
$$i_2(t) = 3 + e^{-20t} - 4e^{-5t}$$

3.



Jawab : Misalkan tiap waktu t tali bergerak sepanjang x m, maka menurut hukum Newton ke 2

$$F = m a$$

$$m a = m g (12 + x) - m g (8 - x)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g (12 + x) - g (8 - x)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 12g + gx - 8g - xg$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2gx = 4g$$

$$\text{Untuk } g = 10 \text{ m/dt}^2$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 20x = 40$$

$$\text{Persamaan karakteristik PD adalah } m^2 - 20 = 0$$

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{20}$$

$$\text{Jawaban komplementer PD: } x(t) = c_1 e^{\sqrt{20}t} + c_2 e^{-\sqrt{20}t}$$

$$\text{Misalkan } A \rightarrow x'p = 0 \quad ; \quad x''p = 0$$

$$\text{Persamaan menjadi: } 0 - 20A = 40$$

$$A = -2$$

$$\text{Didapatkan jawaban PD adalah: } x(t) = c_1 e^{\sqrt{20}t} + c_2 e^{-\sqrt{20}t} - 2$$

$$\text{Syarat batas: } \left. \begin{array}{l} t = 0 \\ x = 0 \\ \frac{dx}{dt} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) 0 = c_1 1 + c_2 1 - 2 \rightarrow c_1 + c_2 = 2 \\ (2) \frac{dx}{dt} = \sqrt{20} c_1 e^{\sqrt{20}t} - \sqrt{20} c_2 e^{-\sqrt{20}t} \\ 0 = \sqrt{20} c_1 - \sqrt{20} c_2 \rightarrow c_1 = c_2 \end{array}$$

$$\text{Didapat: } c_1 = 1$$

$$c_2 = 1$$

$$\text{Jadi PD yang didapat : } x(t) = e^{\sqrt{20}t} + e^{-\sqrt{20}t} - 2$$

$$\text{Tali lepas apa bila } x(t) = 8 \text{ m}$$

$$\text{Persamaan menjadi } 8 = e^{\sqrt{20}t} + e^{-\sqrt{20}t} - 2$$

$$e^{\sqrt{20}t} + e^{-\sqrt{20}t} = 10$$

$$2 \cosh \sqrt{20} t = 10$$

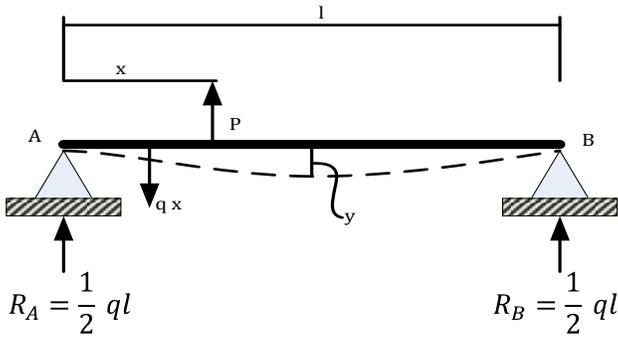
$$\cosh \sqrt{20} t = 5$$

$$\sqrt{20} t = \cosh^{-1} 5$$

$$t = 0,5126 \text{ detik}$$

$$\text{Jadi waktu tali sampai lepas dari pasak: } t = 0,5126 \text{ detik}$$

4.



Momen sejauh x dari A

$$M_p = \frac{1}{2} q l x - q x \frac{1}{2} x$$

Menurut hukum Newton untuk batang tegar didapat keseimbangan:

$$E I \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} q l x - \frac{1}{2} q x^2$$

Persamaan Diferensial ordo dua penyelesaian integral langsung:

$$E I \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} q l x^2 - \frac{1}{6} q x^3 + c_1$$

Syarat batas:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = 0 \\ x = \frac{1}{2} l \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 = \frac{1}{4} q l \frac{1}{4} l^2 - \frac{1}{6} q \frac{1}{8} l^3 + c_1 \\ c_1 = \frac{1}{48} q l^3 - \frac{1}{16} q l^3 = -\frac{1}{24} q l^3 \end{array}$$

$$E I \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} q l x^2 - \frac{1}{6} q x^3 - \frac{1}{24} q l^3$$

$$E I y(x) = \frac{1}{12} q l x^3 - \frac{1}{24} q x^4 - \frac{1}{24} q l^3 x + c_2$$

Syarat batas:

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} c_2 = 0 \\ E I y(x) = \frac{1}{12} q l x^3 - \frac{1}{24} q x^4 - \frac{1}{24} q l^3 x \end{array}$$

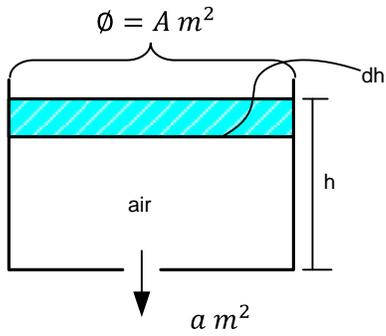
Persamaan lendutan :
$$y(x) = -\frac{q}{24 EI} (x^4 - 2lx^3 + l^3x)$$

Max jika $y = \frac{1}{2} l$;

Lendutan max adalah:

$$y_{max} = -\frac{5 q l^4}{384 EI} \text{ (arah ke bawah)}$$

5.



5

Jawab :

Persamaan keseimbangan :

Volume air turun = volume air keluar

$$A dh = v a dt$$

$$v = \sqrt{2 g h} \text{ (fisika)}$$

Persamaan diferensial yang dibuat

$$\frac{dh}{dt} = \frac{a}{A} \sqrt{2 g h}$$

$$10 \left\{ \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{a}{A} \sqrt{2 g} dt \quad \int \right.$$

$$2 \sqrt{h} \Big|_{h_2}^{h_1} = \frac{a}{A} \sqrt{2 g} \Big|_{t_2}^{t_1} + c$$

$$t_2 - t_1 = \frac{2 A}{a \sqrt{2 g}} \sqrt{h} \Big|_2^1$$

Tangki kosong jika $h_2 = 0$

Jadi waktu untuk pengosongan tangki adalah

$$15 \left\{ t = \frac{2 A}{a \sqrt{2 g}} \sqrt{h} \right.$$