BAB I
PERSAMAAN DIFFERENSIAL BIASA (PDB)

Tujuan Pembelajaran

Pada bab – 1. ini, pembaca diperkenalkan kepada persamaan differensial (PD) dan jenis-jenisnya. Selain itu juga dijelaskan cara-cara pembuatan persamaan differensial, baik secara teoritis maupun empiris (pemodelan), masalah syarat batas, dan jenis jawaban persamaan differensial.

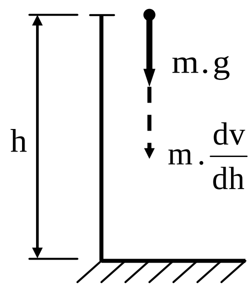
Setelah mempelajari bab – 1. ini, diharapkan para mahasiswa dapat mengerjakan soal-soal yang disediakan pada akhir bab – 1, sesuai dengan contoh-contoh soal yang telah dikemukakan.

A. Pendahuluan

Persamaan differensial (PD) muncul karena adanya keingintahuan manusia (para ilmuan) tentang fenomena alam semesta. Manusia selalu ingin tahu tentang peristiwa proses fisik yang ada di bumi. Misalnya tentang gerakan benda, intraksi laju perubahan antar variabel aktivitas biologis dengan waktu, cara menginterpolasikan gerak bintang dan benda-benda di langit sebagai kompas dalam pelayaran, dan sebagainya.

Pemecahan masalah yang nyata secara matematik dilakukan dengan cara merubah variabel masalah menjadi bahasa matematik. Proses seperti ini disebut sebagai "pemodelan matematik". Dalam dunia sains dan teknologi, pemodelan matematik digunakan untuk memahamai fenomena fisik. Model yang digunakan berbentuk persamaan yang berisikan turunan-turunan fungsi dari suatu fungsi yang belum diketahui. Persamaan yang terbentuk dinyatakan sebagai persamaan differensial.

Sebagai contoh, model yang sering dijumpai dalam kalkulus yaitu gerak jatuh bebas. Partikel yang dijatuhkan dari ketinggian tertentu (h), karena pengaruh gravitasi bumi (g), menurut Hukum Newton II bahwa: "massa obyek (m) dikali dengan percepatannya (a), seimbang dengan jumlah gaya (F) yang beraksi pada obyek tersebut. Dalam bahasa matematis ditulis dengan persamaan:



Gbr.1.1 Benda Jatuh Bebas

$$m\,.\,a = -m.g, \text{ atau, } m.\frac{d^2h}{dt^2} = -\,m.g$$

dimana :

$$\frac{d^2h}{dt^2} = a\,,\ \text{percepatan} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

hasil integralnya adalah: $\frac{dh}{dt} = -g\,t + C_1$

$$h(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + C_1\,t + C_2$$

Dalam hal ini C_1 dan C_2 dinyatakan sebagai konstanta integrasi, dapat dihitung jika diketahui syarat-syarat batas dari gerakan, yaitu: tinggi awal (h), kecepatan awal (v_o) pada saat t = 0 diketahui, Rumus di atas digunakan (berlaku) untuk tinggi obyek pada saat waktu t, sebagai solusi dari persamaan awal $m\frac{d^2h}{dt^2} = -g.m$

B. Pembuatan Persamaan Differensial

Persamaan differensial dapat dibuat dengan dua cara, yaitu secara teoritis dan secara pemodelan matematis (empirik).

1. Pembuatan PD Secara Teoritis

Secara teoritis PD dapat dibuat dari suatu fungsi yang mengandung konstanta dengan cara mengeliminasi konstanta tersebut ke dalam bentuk variabel.

Contoh:

1) $y = Ax \rightarrow A = \frac{y}{x}$

turunannya:

$$\frac{dy}{dx} = A$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\text{atau: } \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0 \ \text{ adalah PD ordo satu}$$

$$\text{atau : } dy - \frac{y}{x}dx = 0 \ \text{ adalah PD ordo satu.}$$

$$x.dy - y\,dx = 0\text{; juga merupakan PD ordo satu}$$

2) PD Ordo Doa Koefisien Variabel

$$y = A\,x^{m} + B\,x^{n} \rightarrow A = y\,x^{-m} - B\,x^{n-m}$$

$$y' = m\,A\,x^{m-1} + n\,B\,x^{n-1}$$

$$y' = m\,(y.x^{-m} - B\,x^{n-m}) + n\,B\,x^{n-1}$$

$$= m\,y.x^{-1} - B\,x^{n-1} + n\,B\,x^{n-1}$$

$$= m\,y.x^{-1} + (n-m)B\,x^{n-1} \rightarrow B = \frac{1}{n-m}y^{1}.x^{1-n} - \frac{m\,y\,x^{-n}}{(n-m)}$$

$$y'' = m\,y.x^{-1} - m\,y\,x^{-2} + (n-m)(n-1)B\,x^{n-2}$$

$$y'' = m\,y^{1}.x^{-1} - m\,y\,x^{-2} + (n-m)(n-1)\left\{\frac{1}{n-m}y'x^{1-n} - \frac{m}{(n-m)}y\,x^{-n}\right\} - x^{n-2}$$

$$y'' = m\,y^{1}.x^{-1} - m\,y\,x^{-2} + (n-1)y^{1}\,x^{-1} - m(n-1)\,y\,x^{-2}$$

$$y'' = (m+n-1)\,y^{1}\,x^{-1} - n\,(1+n-1)\,m\,y\,x^{-2}$$

$$y'' = (m+n-1)\,y^{1}\,x^{-1} - n.\,m\,y\,x^{-2} \qquad \text{X} \quad x^{2}$$

$$x^{2}.y'' - (m+n-1)\,x\,y^{1} + n.m.y = 0, \ \text{ PD ordo dua koefisien variabel}$$

3) PD Ordo Dua Koefisien Konstanta

$$y = A\,x^{m} + B\,x^{n} \rightarrow A = y\,x^{-m} - B\,x^{n-m}$$

$$y' = m\,A\,x^{m-1} + n\,B\,x^{n-1}$$

$$y' = 2\left(y e^{-2x} - B e^{3x}\right) e^{2x} + 3B e^{3x}$$
$$y' = 2y - 2B e^{3x} + 3B e^{3x}$$
$$y' = 2y + B e^{3x} \rightarrow B = y' e^{-3x} - 2y e^{-3x}$$
$$y'' = 2y' + 3B e^{3x}$$
$$y'' = 2y' + 3\left(y' e^{-3x} - 2y e^{-3x}\right) e^{3x}$$
$$y'' = 2y' + 3y' - 6y$$
$$y'' = -5y' + 6y = 0$$
$$y'' + 5y' + 6y = 0 \text{ adalah PD ordo dua koefisien konstanta}$$

Contoh-contoh lain dapat dibuat sendiri, apakah PD ordo satu, ordo dua, dan seterusnya. Persamaan differensial yang hanya mengandung satu variabel bebas dinyatakan sebagai PD biasa. Bila variabel bebasnya lebih dari satu dinyatakan sebagai PD parsial.

2. Pembuatan PD Secara Pemodelan Matematis (Empiris)

Pemodelan matematika adalah proses formulasi fenomena alam nyata (terutama fisika) dalam bentuk matematik, dengan memanfaatkan persamaan differensial. Prosedur pemodelan masalah fenomena alam nyata adalah sebagai berikut:

a. Identifikasi masalah, dengan cara menentukan variabel-variabel yang terkena hukum kausal (sebab-akibat), sehingga dapat dibuat formulasi model real, dalam bentuk bahasa matematika.

b. Mengembangkan asumsi tentang variabel yang berinteraksi pada fenomena tersebut. Secara umum kita tidak dapat menyertakan semua variabel (faktor) yang terlibat dalam hukum kausal pada fenomena yang sedang kita kaji (telaah). Dengan demikian kita harus membatasi model matematisnya yang dibuat, dengan cara mereduksi faktor-faktor (variabel) yang tidak terlalu mempengaruhi obyek, sehingga kompleksitas permasalahan bisa di reduksi dengan mengambil asumsi, hubungan sederhana antar variabel (hubungan linier).

Asumsi yang dikembangkan adalah:

- Klasifikasi Variabel

  Variabel mana yang dianggap saling berinteraksi paling kuat. Hal ini dinyatakan sebagai variabel terikat dan variabel bebas. Variabel (faktor) lainnya diabaikan. Sehingga dapat dikembangkan konsep laju perubahan antar variabel.

- Menentukan Interaksi yang terjadi antar variabel yang terseleksi, Untuk dikaji lebih lanjut.

  Untuk persoalan yang kompleks, intraksi dan relasi antar variabel tidak dapat dilihat secara langsung pada awal pengamatan.

  Pada kasus ini, perlu dibuat atau dikembangkan sub model, yang mengandung beberapa variabel bebas secara terpisah. Sub model ini terintegral terhadap asumsi dasap yang dikembangkan pada model utama. Analisis ini dikenal dengan Analisis Jalur.

c. Meyelesaikan atau Interpretasi Model

   Bila model yang di buat telah solid, maka model tersebut harus dapat di selesaikan secara matematika (solusi persamaan differensial), dengan memanfaatkan syarat-syarat batas yang diketahui, misalnya kondisi awal, batas kritis ataupun kondisi extreem dan hasil-hasil percobaan.

d. Verifikasi Model

   Untuk menyatakan apakah model yang di kembangkan telah valid, perlu diuji dengan cara mengemukakan pertanyaan sebagai berikut:

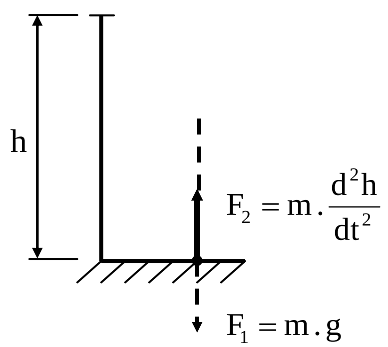
   - Apakah model telah memuat masalah yang diidentifikasikan
   - Apakah model sejalan dengan akal yang sehat
   - Apakah model dapat diuji dengan cara mengumpulkan data (diuji secara empirik)
   - Apakah model masih dapat dikembangkan (modifikasi dan inovasi pengembangan model).

Contoh:

pelemparan partikel secara vertikal keatas sampai ketinggian h.

1) Identifikasi masalah: laju perubahan ketinggian partikel (h), terhadap waktu (t), faktor-faktor lainnya; kecepatan awal v_o, massa m, gravitasi g dan gaya F.
2) Asumsi yang dikembangkan

   1. Gaya yang mempengaruhi hanya gaya gravitasi g $^{m}/_{dt^2}$.
   2. Gaya gesek udara diabaikan, selama gerakan partikel.
   3. Ada gaya luar lain yang bekerja pada partikel dan diabaikan.
   4. Adanya kecepatan awal v_o.



Gbr. 1.2 Hukum Keseimbangan Gaya

Dengan mengambil asumsi (1), maka menurut hukum Newton II, tentang keseimbangan gaya (lihat gambar) yang beraksi pada obyek adalah sebagai berikut:

$$m.\frac{d^2h}{dt^2} = -m.g \quad \text{(model matematika)}$$

3) Penyelesaian model PD ordo dua ini adalah dengan integral langsung sebanyak dua kali.

   Didapat:

$$\frac{dh}{dt} = -g.t + C_1$$

Syarat batas :

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ \dfrac{dh}{dt} = v = v_o \end{array}\right\} \quad vo = -g.t + C_1$$

$$C_1 = v_o$$

$$\text{jadi,} \quad \frac{dh}{dt} = v = v_o - g.t$$

Hasil integral selanjutnya: $h(t) = v_o.t - \frac{1}{2} g t^2 + C_2$

Syarat batas:

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ h = 0 \end{array}\right\} 0 = v_{o.}o - \tfrac{1}{2}.g(0)^2 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

Jadi persamaan gerak benda adalah: $h(t) = v_o.t - \frac{1}{2} g t^2$

Adalah model gerak vertikal benda dengan kecepatan awal.

4) Verifikasi model: Tinggi maksimum dicapai bila $v_t = 0$

$$v_t = v_o - g.t \rightarrow t = \frac{v_o}{g}$$

$$h_{\max} = v_o.\frac{v_o}{g} - \tfrac{1}{2}.g.\left(\frac{v_o}{g}\right)^2 = \tfrac{1}{2}.\frac{v_o}{g}^2$$

Rumus-rumus dalam gerakan pada fisika dasar. Pembahasan lebih lanjut pada bab 6.

C. Klasifikasi Persamaan Differensial

Persamaan yang mengandung turunan fungsi atau differensial dari suatu fungsi yang tidak diketahui dalam bentuk variabel terikat dinyatakan sebagai persamaan differensial (PD). Bila PD hanya mengandung satu variabel bebas, dinyatakan sebagai persamaan differensial biasa (PDB). Bila PD berisikan turunan parsial (karena variabel bebasnya lebih dari satu) disebut sebagai Persamaan Differensial Parsial (PDP).

Ordo dari persamaan differensial dinyatakan oleh turunan tertinggi yang membentuk PD.

Misalnya: $x^2 \frac{dy}{dx} + x\,y = e^x$ adalah PD ordo satu

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + c\,y = x^2 \text{ adalah PD ordo dua}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \sin x\frac{dy}{dx} + y = \cos x \text{ adalah PD ordo tiga}$$

Derajat dari PD dinyatakan oleh pangkat tertinggi yang dimiliki oleh ordo turunan tertinggi yang ada pada PD tersebut.

Contoh : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \sqrt{3 - \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2}$

adalah PD ordo tiga berderajat dua karena:

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 = 3 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^8$$

Secara umum PDB berordo n dinyatakan dalam bentuk:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0$$

atau : $\frac{d^ny}{dx^n} + f(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n+1}} + ... + g(x)\frac{dy}{dx} + h(x)g = Q(x)$

Disini F menyatakan fungsi variabel bebas x dan variabel terikat y dan y' merupakan turunan y terhadap x.

Suatu PD dinyatakan linier apabila memiliki tanda-tanda sebagai berikut:

1. Variabel y dan turunannya hanya berderajat satu.
2. Tidak mengandung perkalian y dengan turunannya serta antar turunan dengan turunanya yang lain.
3. Variabel terikat y bukan fungsi transenden.

Bila syarat-syarat ini tidak terpenuhi, maka persamaan tersebut dinyatakan sebagai PDB ordo ke n tak linier. Selanjutnya PDL dinyatakan homogen (PDLH) apabila $Q(x) = 0$ .Contohnya: $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$; PDL H ordo dua.

Bila a, b, dan c merupakan konstanta, maka PDL dinyatakan sebagai PDL dengan koefisien konstanta. Bila a, b, dan c sebagai fungsi x atau a(x), b(x), dan c(x) maka PDL dinyatakan sebagai PDL dengan koefisien variabel.

Contoh:

1. $y'' + 5dy' - 6y = 0$ adalah PDL ordo dua koefisien konstanta.
2. $x\frac{d^4y}{dx^4} + x^2\frac{d^2y}{dx} + x^3\frac{dy}{dx} = x\,e^3$ adalah PDLNH ordo empat koefisien variabel.
3. $y'' + 6y' + 16y^2 = 0$ adalah PD tak linier
4. $y'' + (y')^2 + 6y^2 = 0$ adalah PD tak linier
5. $y'' + 3yy' + 5y^2 = 0$ adalah PD tak linier
6. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{dy}{dy^2} = 0$ adalah PDP

Bentuk lain PDB dapat ditulis $f(x, y, y') = 0$ sebagai PD variabel terpisah dalam bentuk $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Dengan syarat $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ dapat dinyatakan sebagai perkalian fungsi dari x dan fungsi dari y saja.

Contoh: $\frac{dx}{dy} = \frac{3\,x\,y + x^2}{x - y^3}$ dapat ditulis dalam bentuk

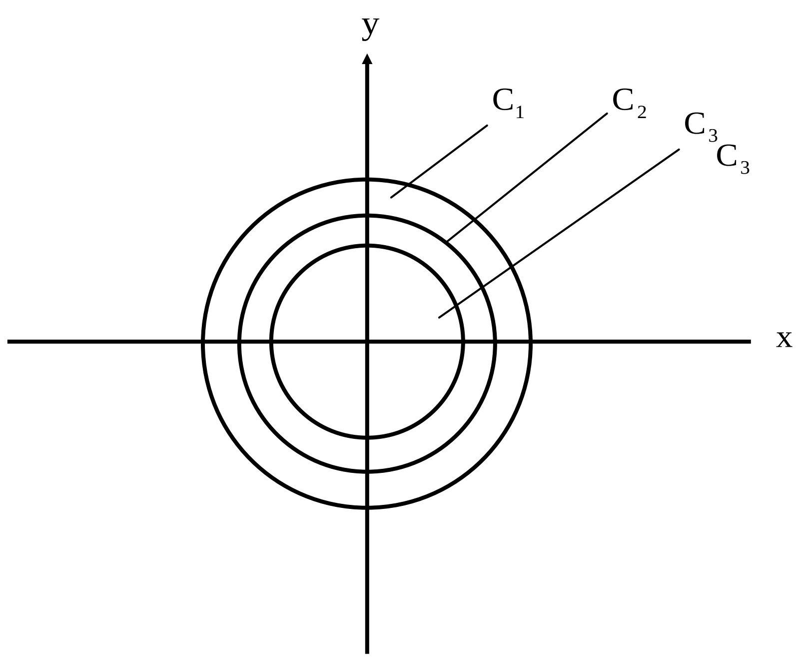
$$(x - y^3)dx - (3\,x\,y + x^2)dy = 0$$

D. Jawaban Persamaan Differensial (Solusi)

Setelah memahami bentuk PD, selanjutnya perlu dipahami bentuk-bentuk solusi dari PD tersebut pada bagian ini akan dibahas pengertian tentang solusi PD. Ada dua jenis solusi yang perlu dipahami yaitu: (1) solusi umum (himpunan solusi) dan (2) solusi khusus.

Solusi umum adalah jawaban PD yang masih mengandung konstanta sebarang. Solusi khusus adalah jawaban PD tidak lagi mengandung konstanta sebarang. Konstanta sebarang dapat dicari nilainya dengan cara menggunakan syarat-syarat batas yang diketahui. Misalnya $f(0)=1; f(\,)=0; f'(0)=1; f(\,)=-1$, kondisi lain pada saat percobaan dan lain-lain.

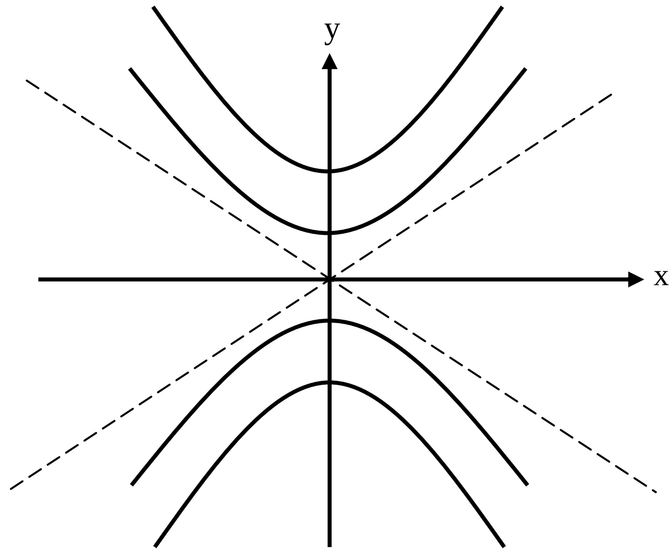
Selain kedua jenis solusi di atas, solusi PD dapat juga disajikan secara grafik geometri. Misalnya: Solusi keluarga dari PD, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ adalah lingkaran-lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = C$. Bentuk grafisnya seperti gambar 1.3.



Gbr. 1.3 Keluarga Lingkaran $x^2 + y^2 = C$

Solusi keluarga PD $y\frac{dy}{dx} - 4x = 0$ adalah

$2x^2 - y^2 = C$, merupakan keluarga hiperbola seperti berikut:



Gbr. 1.4 Keluarga Hiperbola $2x^2 - y^2 = C$

E. Masalah Syarat Batas (SB)

Untuk mendapatkan solusi khusus suatu PD diperlukan nilai-nilai fungsi atau turunannya pada suatu titik atau interval I. Nilai-nilai tersebut digunakan untuk menentukan nilai-nilai konstanta yang terkandung dalam solusi umum suatu PD. Pada solusi umum suatu PD, selalu didapatkan n konstanta. Seluruh konstanta ini dapat dihitung jika diketahui n nilai-nilai $y(x_o)$, $y'(x_o)$, $y''(x_o)$, ... $y^{n-1}(x_n)$,. Nilai-nilai x_o, x_1, x_2, ... x_n disebut sebagai Syarat Batas (SB), nilai ini terkadang kali dapat berupa Nilai Awal (NA) atau Nilai Eksperimen (NE).

Contoh:

1. Buktikan bahwa f(x) = sin x – cos x adalah solusi NA dari $y'' + y = 0$, untuk y(0) = -1 dan $y'(0) = 1$

   Bukti; dari: $f(x) = \sin x - \cos x \rightarrow y(0) = \sin 0 - \cos 0 = -1$

   $$f'(x) = \cos x + \sin x \rightarrow y'(0) = \cos 0 + \sin 0 = 1$$

   $$f'(x) = -\sin x + \cos x$$

$\text{substitusikan ke persamaan} \rightarrow y'' + y = 0, \text{menghasilkan}$
$-\sin x + \cos x + \sin x - \cos x = 0, \text{ untuk semua nilai } x$

Karena semua syarat terpenuhi maka terbukti bahwa f(x) adalah solusi NA yang diberikan.

2. Buktikan bahwa $f(x) = C_1.C^{-x} + C_2.C^{2x}$ adalah solusi $y'' - y' - 2y = 0$, untuk seberang konstanta C_1 dan C_2, sehingga memenuhi syarat awal (SA), y(0) = 2 dan y'(0) = 3.

   Bukti: $f(x) = C_1.C^{-x} + C_2.C^{2x} \rightarrow f(0) = C_1 + C_2 = 2$

   $$f'(x) = -C_1.C^{-x} + 2C_2.C^{2x} \rightarrow f'(0) = -C_1 + 2C_2 = -3$$
   $$f'(x) = C_1.C^{-x} + 4C_2.C^{2x}$$

   $\text{masukan kedalam permasaan} : y'' + y' - 2y = 0$

   $$C_1.C^{-x} + 4C_2.C^{2x} + C_1.C^{-x} - 2C_2.C^{2x} - 2C_1.C^{-x} - 2C_2.C^{2x} = 0$$

   karena semua syarat terpenuhi, maka terbukti bahwa f(x) adalah solusi dari SA yang diberikan.

Dari NA yang diberikan untuk PD ordo satu, $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, untuk $y(x_o) = y_o$, diasumsikan f dan $\frac{dy}{dx}$ kontinu $R = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$, yang memuat titik (x_o, y_o), maka NA mempunyai solusi tunggal g(x) pada beberapa interval $x_o - h < x$, $(x_o + h)$ dengan h bilangan positif.

Contoh:

1. Apakah NA; $\frac{dy}{dx} = x^2 - xy^3$, untuk y(1) = 6 mempunyai solusi yang tunggal?

   Jawab: $F(x, y) = x^2 - xy^3$ dan $\frac{\partial F}{\partial y} = -3xy^2$;

   merupakan fungsi yang kontinu dalam segi empat yang memiliki titik (1,6).

   Berarti hipotesis teorema di atas terpenuhi. Akibatnya NA mempunyai solusi tunggal dalam suatu interval disekitar x = 1 dengan bentuk (1 – h, 1 + h) dimana h bilangan positif

2. Apakah NA, $\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3}$ untuk y(2) = 0, memenuhi solusi yang tunggal.

Jawab:

Dari $f(x, y) = 3y^{2/3}$ dan $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y^{-1/3}$

karena $\frac{\partial F}{\partial y}$ diskontinu dan tidak didefinisikam di y = 0, akibat tidak ada segi empat yang memuat titik (2,0) dimana f dan $\frac{dF}{dy}$ keduanya kontinu, karena teorema di atas tidak terpenuhi, maka NA tidak memiliki solusi.

F. Soal-soal Latihan

A. Tentukan jenis PD berikut:

1. $\frac{dy}{dx} + x^2 y = xe^x$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dy^2} = 2$
3. $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = 2\cos x$
4. $x^2 dy - y^2 dx = 0$
5. $\frac{d^4y}{dx^4} + \left(3\frac{d^2y}{dx^2}\right) + -5y = 0$

B. Buatlah PD dari fungsi berikut:

1. $y = Ae^{2x} + Be^{-3x}$
2. $y = Ae^2 + Bx^4$
3. $y = A\sin 2x + B\cos 2x$
4. $y = Ax^m + Bx^{-1}$
5. $y = Ax$

C. Buktikan bahwa:

1. $y = \sin x + x^2$ solusidari $y'' + y = x^2 + 2$
2. $x = \cos t - 2\sin t$ solusidari $x'' + y = 0$
3. $y = A\cos x + B\sin x$ solusidari $y'' + y = 0$
4. $y = e^{2x} - 3e^{-x}$ solusidari $y'' + y' - 2y = 0$
5. $x^2 + y^2 = c$ solusidari $y' = \dfrac{x}{y}$

D. Selidikilah, apakah NA mempunyai solusi yang tunggal

1. $\dfrac{dy}{dx} = x^3 - y^3, \text{untuk } y(0) = 6 \ldots$
2. $\dfrac{dy}{dx} - xy = \sin^2 x:\ y(\pi) = 5$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \sin x - \cos x:\ y(\pi) = 0$
4. $\dfrac{dy}{dx} = 2y^{\frac{1}{2}}, \text{untuk } y(2) = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx} = x^3 + xy^2, \text{untuk } y(1) = 4$