BAB VII
TRANSFORMASI LAPLACE

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan mahasiswa memiliki kemampuan untuk membuat bentuk-bentuk Transformasi Laplace dari berbagai jenis fungsi. Demikian juga dengan invers Transformasi Laplace yang dibuatnya. Selanjutnya diharapkan agar mahasiswa mampu merubah PD ke dalam bentuk persamaan yang berisikan unsur-unsur Transformasi Laplace, dan menyelesaikannya, sesuai dengan syarat batas yang diketahui.

A. Pendahuluan

Transformasi Laplace (TL) adalah suatu metode untuk mnyelesaikan persamaan differensial (PD) dan masalah nilai awal serta syarat batas. Prosedur yang ditempuh terdiri dari tiga langkah, yaitu:

1. Merubah PD menjadi persamaan aljabar sederhana (persamaan bantu), dengan memanfaatkan tabel TL.
2. Persamaan bantu diselesaikan secara aljabar sederhana.
3. Mentransformasikan kembali persamaan bantu, hasil penyelesaian (2) ke dalam bentuk awal (sesuai tabel TL), sebagai solusi yang diminta.

B. Transformasi Laplace dari Fungsi f(t)

Suatu fungsi f(t) yang terdefinisi pada $t \geq 0$, bila di kali dengan e^{-st} dan diintegrasikan terhadap t, pada batas 0 < t < ~, hasilnya berupa fungsi s atau F(s), yang dinyatakan sebagai Transformasi Laplace (TL). Ditulis $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ atau:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t).e^{-st}\,dt$$

sebaliknya, transformasi invers dari F(s) ditulis $L^{-1}\{F(s)\}$ menghasilkan f(t) atau:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

Catatan: Fungsi awal ditulis dengan huruf kecil dan transformasinya dengan huruf besar. Contoh: Y(s) adalah transformasi dari y(t) dan sebagainya. Sebaliknya $L^{-1}\{F(s)\} = y(t)$ sebagai invers dari TL.

Contoh pembuatan TL :

1. f(t) = a $\longrightarrow$ $L\{f(t)\} = L(a) = \int_a^{\infty} a.e^{-st}\,dt$

$$= -\frac{a}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{a}{s}$$

artinya : $\frac{a}{s}$ adalah TL dari f(t) = a

Inversnya adalah : $L^{-1}\left\{\frac{a}{s}\right\} = a$

2. f(t) = t $\longrightarrow$ $L\{f(t)\} = L(t) = \int_0^{\infty} t.e^{-st}\,dt$

$$= -\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

artinya $\frac{1}{s^2}$ adalah TL dari f(t) = t

inversnya adalah $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$

analog untuk f(t) = t^n $\longrightarrow$ $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

sehingga $L^{-1}\left(\frac{1}{s^{n+1}}\right) = \frac{1}{n!}t^n$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s-a}$$

3. f(t) = e^{at} $\longrightarrow$ $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at}.e^{-st}\,dt$

artinya $\dfrac{1}{s-a}$ adalah TL dari f(t) = e^{at}

inversnya adalah $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s-a}\right) = e^{at}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right) = e^{-at}$$

4. f(t) = cos ωt $\longrightarrow$ $\mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \int_0^\infty \cos\omega.t.e^{-st}\,dt = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

dan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+\omega^2}\right\} = \cos.\omega.t$

5. f(t) = sin ωt $\longrightarrow$ $\mathcal{L}\{\sin\varpi.t\} = \int_0^\infty \sin\omega.t.e^{-st}\,dt = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

dan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\} = \sin\omega.t$

6. f(t) = cos h ωt $\longrightarrow$ $\mathcal{L}\{\cosh\omega.t\} = \int_0^\infty \cosh\omega.t.e^{-st}\,dt = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

dan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-\omega^2}\right\} = \cosh.\omega.t$

7. f(t) = sin h ωt $\longrightarrow$ $\mathcal{L}\{\sinh\omega.t\} = \int_0^\infty \sinh\omega.t.e^{-st}\,dt = \dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$

dan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}\right\} = \sinh.\omega.t$

Nilai-nilai tersebut di tabelkan, demikian juga nilai-nilai dari bentuk fungsi lainnya. Operasi Transformasi Laplace bersifat linier, untuk setiap f(t), g(t), h(t) ataupun konstanta sembarang.

Sehingga dapat ditulis :

$$\mathcal{L}\{a\,f(t)+b\,g(t)+c\,h(t)\} = a\,\mathcal{L}\{f(t)\}+b\,\mathcal{L}\{g(t)\}+c\,\mathcal{L}\{h(t)\}$$

Bukti : $\mathcal{L}\{a\,f(t)+b\,g(t)+c\,h(t)\} = \int_0^\infty \left[af(t)+bg(t)+ch(t)\right]e^{-st}\,dt$

$$= a\int_0^\infty f(t).e^{-st}dt + b\int_0^\infty g(t).e^{-st}dt + c\int_0^\infty h(t)e^{-st}dt$$

$$= aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\} + cL\{h(t)\}$$

Sifat ini mempermudah pencarian bentuk-bentuk Transformasi Laplace dari jumlah beberapa fungsi t.

Contoh :

1. Tentukan TL dari cosh a.t

   Jawab : Bentuk eksponen dari cosh a.t = $\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}$

   Jadi :

$$\mathcal{L}(\cosh a.t) = \frac{1}{2}L\left\{e^{at}\right\} + \frac{1}{2}L\left\{e^{-at}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right)$$

$$\mathcal{L}(\cosh a.t) = \frac{s}{s^2-a^2}$$

   Inversnya adalah $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2-a^2}\right) = \cosh .a.t$

2. Bila $F(s) = \dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$ tentukan $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

   Jawab:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(a-b)}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{(a-b)}\left[L^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s-b}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(a-b)}\left(e^{at}+e^{bt}\right)$$

3. $\mathcal{L}(e^{i\omega t}) = \dfrac{1}{s-i\omega} = \dfrac{s+i\omega}{(s-i\omega)(s+i\omega)} = \dfrac{s+i\omega}{s^2+\omega^2}$

$$= \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

atau : $\mathcal{L}(e^{i\omega t}) = \mathcal{L}\left(\cos\omega.t + i.\sin\omega.t\right)$

$$= \mathcal{L}(\cos\omega.t) + i\,\mathcal{L}(\sin\omega.t)$$

$$= \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}$$

C. Transformasi Laplace dari Turunan Fungsi

Sifat linieritas TL dapat dimanfaatkan untuk merubah operasi kalkulus menjadi operasi aljabar yang sederhana dalam bentuk transformasi. Secara kasar deferensiasi suatu fungsi f(t) hanya berhubungan dengan perkalian transformasi F(s) dengan s. Karena integrasi merupakan invers dari deferensiasi, maka operasi sangat berhubungan dengan pembagian transformasi oleh s.

1. Transformasi Turunan Fungsi

Jika f(t) kontinu pada $t \geq 0$, untuk setiap γ dan M, dan memiliki turunan $f^1(t)$ yang kontinu pada daerah hasil $t \geq 0$, maka TL dari turunan $f^1(t)$ ada bila $s \geq \gamma$ dan : $\mathcal{L}(f^1) = s\,\mathcal{L}(f) - f(0)$

Bukti : $\mathcal{L}(f^1) = \int_0^\infty f^1(t).e^{-st}\,dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty f(t).e^{-st}\,dt$

$$= -f(0) + sL(f(t))$$

jadi $\mathcal{L}(f^1) = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$

Perluasan dari TL turunan pertama ini digunakan untuk TL turunan yang lebih tinggi.

$\mathcal{L}(f'') = s\,\mathcal{L}(f') - f(0)$

$= s\,(s\,\mathcal{L}(f) - f(0)) - (f')\,0$

$= s^2\,\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$

$L(f''') = s\,L(f'') - f'(0)$

$= s\,(s^2 L(f) - sf(0) - f'(0)) - f''(0)$

$= s^3 L(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$

$L(f^{(n)}) = s^n L(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$

Melalui TL turunan fungsi ini, juga dapat dicari bentuk-bentuk TL suatu fungsi.

Contoh:

1. Tentukan $L(t^2) = \ldots$

   Jawab : $f(t) = t^2$ $f`(t) = 2t$ $f``(t) = 2$

   $f(0) = 0$; $f`(0)$; $f``(0) = 2$

   jadi : $L(f``) = s^2 L(f) - sf(0) - f`(0)$

   $$\frac{2}{s} = s^2 L(f) - s.0 - 0$$

   $$L(f) = \frac{2}{s^3} \rightarrow L(t^2) = \frac{2}{s^3}$$

2. Tentukan $L(t^3) = \ldots$

   Jawab : $f(t) = t^3$; $f`(t) = 3t^2$; $f``(t) = 6t$; $f```(t) = 6$

   $f(0) = 0$; $f`(0) = 0$; $f``(0) = 0$; $f```(0) = 6$

   jadi : $L(f```) = s^3 L(f) - s^2 f(0) - sf`(0) - f``(0)$

   $$\frac{6}{s} = s^3 L(f) - s^2 - 0 - s.0 - 0$$

   $$L(f) = \frac{6}{s^4} \rightarrow L(t^3) = \frac{3!}{s^4}$$

3. Tentukan $L(\cos \omega t) = \ldots$

   Jawab : $f(t) = \cos \omega t$; $f`(t) = -\omega \sin \omega t$; $f``(t) = -\omega^2 \cos \omega t$

   $f(0) = 1$; $f`(0) = 0$; $f``(0) = -\omega^2$;

   $f``(t) = -\omega.f(t)$

   $L(f``) = s^2\ L(f) - s\,f(0) - f`(0) = -\omega^2.\ L(f)$

   $s^2.\ L(f) - s1 - 0 = -\omega^2\ L(f)$

$$(s^2+\omega^2)\ \mathcal{L}(f) - s = 0$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos.\omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

dan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)}\right\} = \sin^2 t.$

4. Tentukan $\mathcal{L}(\sin^2 t) = ...$

Jawab : $f(t) = \sin^2 t \longrightarrow f(0) = 0$

$f`(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t \longrightarrow f`(0) = 0$

$\mathcal{L}(f`) = \mathcal{L}(\sin 2t)$

$s\,\mathcal{L}(f) - f(0) = \frac{2}{s^2+4}$

$\mathcal{L}(f) = \frac{2}{s(s^2+4)} \rightarrow \mathcal{L}(\sin^2 t) = \frac{2}{s(s^2+4)}$

dan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)}\right\} = \sin^2 t.$

5. Tentukan $\mathcal{L}(t.\sin \omega t) = ...$

Jawab: $f(t) = t \sin \omega t \longrightarrow f(0) = 0$

$f`(t) = \sin \omega t + t.\,\omega.\cos \omega t \longrightarrow f`(0) = 0$

$f``(t) = 2\,\omega \cos \omega t - \omega^2.t \sin \omega t$

$= 2\,\omega \cos \omega t - \omega^2.f(t)$

$\mathcal{L}(f``) = 2\omega\,(\cos \omega t) - \omega^2\ \mathcal{L}(f)$

$S^2\,\mathcal{L}(f) - sf(0) - f`(0) = 2\omega \frac{s}{s^2+\omega^2} - \omega^2 \mathcal{L}(f)$

$(s^2+\omega^2)\ \mathcal{L}(f) = \frac{2\omega s}{s^2+\omega^2}$

$\mathcal{L}(f) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2} \longrightarrow \mathcal{L}(t \sin \omega t) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

dan $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\right\} = \sin^2 \omega t.$

D. Penggunaan TL untuk Penyelesaian Persamaan Differensial

Sesuai dengan tujuan semula, yaitu pembahasan TL digunakan untuk membantu penyelesaian persamaan differensial, maka selanjutnya akan di kemukakan beberapa contoh untuk penyelesaian Persamaan Differensial tersebut.

Contoh :

1. Selesaikan $\dfrac{dy}{dt} + y = e^t$, bila y (0) = 1

   Jawab : Persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk TL yaitu $\mathcal{L}$(Y)= Y, sehingga dapat ditulis :

   s.Y – f(0) + Y = $\mathcal{L}$ (e^t)

   s.Y – 1 + Y = $\dfrac{1}{(s-1)}$

   (s +1) Y = $\dfrac{1}{(s-1)} + 1$

   (s +1) Y = $\dfrac{s}{(s-1)}$

   Y = $\dfrac{s}{(s+1)(s-1)} = \dfrac{s}{s^2-1}$

   y(t) = $\mathcal{L}^{-1}$(Y) = $\mathcal{L}^{-1}$ $\dfrac{s}{(s^2-1)}$ = cosh t

   atau : y(t) = $\dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, coba selesaikan dengan metode penyelesaian PD ordo satu.

2. Selesaikan y``+ 4y`+3y = 0, bila y(0) = 3 dan y`(0)=1

   Jawab : Persamaan dapat ditulis dalam bentuk TL = y

   S^2Y – sf(0) – f `(0) + 4(sY-f(0)) + 3Y = 0

$S^2Y - 3s - 1 + 4sY - 12 + 3Y = 0$

$(s^2 + 4s + 3)\, Y = 3S + 13$

$$Y = \frac{3s+13}{(s+3)(s+1)}$$

$$Y = \frac{-2}{(s+3)} + \frac{5}{(s+1)}$$

didapat : y(t) $= -2 \; L^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) + 5\left(\frac{1}{s+1}\right)$

$= -2e^{-3t} + 5e^{-t}$ $\longrightarrow$ coba selesaikan dengan metode penyelesaian PD ordo dua.

3. Selesaikan y``+y = 2t untuk $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\pi$ dan $y`\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}$

Jawab : ambil TL L(Y) = Y

Persamaan dapat ditulis

$$s^2Y - sf(0) - f`(0) + Y = L(2t)$$

$$s^2Y - sy(0) - y`(0) + Y = \frac{2}{s^2}$$

$$(s^2 + 1)Y = s.y(0) + y`(0) + \frac{2}{s^2}$$

$$Y = y(0)\frac{s}{s^2+1} + y`(0)\frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{s^2(s^2+1)}$$

y(t) = y (0) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + y'(0)\, L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + 2 \; L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right)$

$$y(t) = y(0)\cos t + y`(0)\sin t + 2t - 2\sin t$$

$$y(t) = y(0)\cos t + (y`(0) - 2)\sin t + 2t$$

$y(t) = A\cos t + B\sin t + 2t$ $\longrightarrow$ Solusi umum

Kondisi yang diketahui :

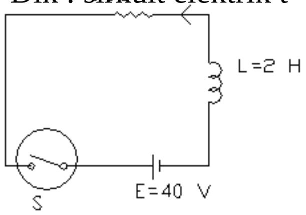
1). $\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{4} \\ y(t) = \dfrac{1}{2}\pi \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\pi = A\dfrac{1}{2}\sqrt{2} + B\dfrac{1}{2}\sqrt{2} + 2\dfrac{\pi}{4} \\ A = -B \end{array}$

2). $\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{4} \\ y`(t) = 2 - \sqrt{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y`(t) = -A\sin t + B\cos t + 2 \\ 2 - \sqrt{2} = -A\dfrac{1}{2}\sqrt{2} + B\dfrac{1}{2}\sqrt{2} + 2 \\ 2 = -B + A \end{array}$

di dapat : A = 1 ; B = -1

jadi jawaban PD adalah y(t) = cos t – sin t + 2t

4. Dik : sirkuit elektrik t = 0; i = 0



Dit : i untuk t > 0

Jawab :

PD yang dapat dibuat: $2\dfrac{di}{dt} + 10i = 40$ atau

$$\frac{di}{dt} + 5i = 20$$

Gunakan L(I)= I, persamaan dapat ditulis :

s. I + i(0) + I = L (20)

(s+5) I + 0 = 20

$$I = \frac{20}{s(s+5)} = \frac{4}{5} - \frac{4}{s+5}$$

i(t) = $L^{-1}\left\{\dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{s+5}\right\} = 4 - 4e^{-5t}$

$$= 4(1 - e^{-5t})$$

jadi kuat arus pada saat t > 0 adalah i(t) = $4(1-e^{-5t})$

Soal-soal :

1. Carilah Transformasi Laplace dari fungsi berikut:

a. $(t^2+1)^2$	d. cos(ωt+2)	g. $\cos^2 t$
b. $e^{-at}+b$	e. $\cos^2 \omega t$	h. $\sin^2 t$
c. sin(at+b)	f. $\sin^2 \omega t$	i. $\sinh^2 t$

j. $\cosh^2 t$

k. $t.e^t$

l. t.cost

m. $t.e^{-st}$

n. t.sin ωt

o. $e^{at}\sin \omega t$

2. Diketahui F(s), seperti di bawah ini, carilah transformasi inver f(t)=L-1(F)

a. $\frac{1}{s^2+9}$

b. $\frac{2s+1}{s^2+4}$

c. $\frac{s-4}{s^2-4}$

d. $\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s^3}$

e. $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$

f. $\frac{4(s+1)}{s^2-16}$

g. $\frac{1}{s^2+3s}$

h. $\frac{4(s+1)}{s^2-16}$

i. $\frac{2}{s}+\frac{1}{s+2}$

j. $\frac{4s+3}{(s+1)(s-1)(s-2)}$

k. $\frac{1}{s(s-2)}$

l. $\frac{10}{s(s^2+9)}$

m. $\frac{4}{s(s^2-1)}$

n. $\frac{1}{s^2+s}$

o. $\frac{1}{s^2(s+1)}$

3. Dengan menggunakan TL, selesaikanlah !
    a. Y``+ 9y = 0 ; bila y(0) = 0 dan y`(0) = 2
    b. 4y`` + π^2y = 0 ; bila y(0) = 2 dan y`(0) = 0
    c. y`` + 25y = t ; bila y(0) = 1 dan y1(0) = 0,04
    d. y`` - 2y` - 3y = 0 ; bila y(0) = 1 dan y`(0) = 7
    e. y`` + 2y` - 8y = 0 ; bila y(0) = 1 dan y`(0) = 8
4. Tentukan ketinggian maximum peluru yang ditembakkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal 1960 cm/dt , g = 980 m/dt^2. Selesaikan dengan TL!

5. Tali tergantung pada pasak sepanang 8m dan 12m pada tiap sisinya. Bila massa tali m kg dan g = 10 m/dt2. Hitunglah waktu agar tali lepas dari pasak. Gunakan TL!

Tabel 7.1
Transformasi Laplace

No	f(t)	$\mathbb{L}$(t)

1	1	$1/s$
2	a	a/s
3	t	$1/s^2$
4	t^2	$2!/s^3$
5	t^n	$n!/s^{n+1}$
6	$e^a t$	$1/(s-a)$
7	e^{-at}	$1/(s+a)$
8	Cos ωt	$s/(s^2+\omega^2)$
9	Sin ωt	$\omega/(s^2+\omega^2)$
10	Cosh at	$s/s^2-a^2)$
11	Sinh at	$a/(s^2-a^2)$
12	t.eat	$1/(s-a)^2$
13	$t^{n-1}e^{at}$	$(n-1)!/(s-a)^n$
14	e^{at}-e^{bt}	$(a-b)/(s-a)(s-b)$
15	ae^{at} - be^{bt}	$(a-b)s/(s-a)(s-b)$
16	e^{at}.sin ωt	$\omega/(s-a)^2+\omega^2$
17	e^{at}.cos ωt	$(s-a)/(s-a)^2+\omega^2$
18	t.sin ωt	$2\omega.s/(s^2+\omega^2)^2$
19	cos at – cos bt	$(b^2-a^2)s/(s^2+a^2)(s^2+b^2)$
20	sin at. sinh at	$2a^2s/(s^4+4a^4)$