BAB V

PERSAMAAN DIFFERENSIAL SIMULTAN

Tujuan Pembelajaran

Pada bab 5. ini, dibahas cara-cara untuk menyelesaikan persamaan simultan. Persamaan seperti ini banyak dijumpai pada permasalahan teknik, terutama teknik elektro, yang membahas hubungan kuat arus dengan waktu dan hubungan antara muatan listrik dengan waktu, yang termuat dalam satu sistem rangkaian.

Metode pemecehan permasalahan simultan telah dibahas di tingkat SLA. Karena itu diharapkan mahasiswa dapat menerapkan metode tersebut dalam permasalahan persamaan differensial simultan ini. Selanjutnya, diharapkan agar mahasiswa memiliki kemampuan dalam menganalisis permasalahan

A. Pendahuluan

Persamaan differensial yang mengandung beberapa variabel terikat (lebih dari satu) tetapi mmiliki satu variabel bebas, sulit untuk diselesaikan secara langsung seperti cara-cara yang telah dibahas pada bab terdahulu. Persamaan seperti itu membentuk suatu sistem persamaan yang simultan. Cara yang ditempuh untuk penyelesaian persamaan menggunakan sistem yang simultan, diantaranya:

1. Metode eliminasi dan substitusi, yang secara simultan menghilangkan salah satu variabel terikat dan turunannya. Selanjutnya menyelesaikan persamaan differensial yang tertinggal. Jawaban dari persamaan differensial yang didapat disubsitusikan ke dalam persamaan semula untuk mendapatkan jawaban variabel yang tereliminasi.
2. Metode matriks dan determinan (cramer), yang dapat dibuat berdasarkan persamaan differensial yang diberikan. Selanjutnya melakukan integral atau penyelesaian yang sesuai dengan ordo persamaan diffrensial yang diperoleh.
3. Metode transformasi laplace, yang dapat merubah persamaan diffrensial menjadi persamaan aljabar biasa yang mudah untuk diselesaikan. Hasil penyelesaian

aljabar biasa ini kembali ditransformasikan ke fungsi semula sebagai jawaban persamaan differensial yang diberikan.

Pada bab ini hanya akan dibahas metode (1) dan (2) karena metode (3) memerlukan pembahasan yang khusus dan dibicarakan pada bab yang akan datang. Selanjutnya, untuk mempermudah pembahasan digunakan contoh langsung dalam menyelesaikan suatu soal.

B. Metode Eliminsasi dan Subsitusi

Berikut adalah sistem persamaan differensial:

1. $\frac{dt}{dx} + 2x + \frac{dy}{dt} + 6y = 2e^t$
2. $2\frac{dt}{dx} + 3x + 3\frac{dy}{dt} + 8y = -1$

Tentukanlah jawaban untuk y(t) dan x(t)

Jawab :

Eliminasi x dan $\frac{dy}{dx}$ dari persamaan

$$2x\,(1) - (2):\ x - \frac{dt}{dx} + 4y = 4e^t + 1\ldots..(3)$$

$$\text{turunan terhadap pers.}(3):\ \frac{dx}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} = 4e^t\ldots..(4)$$

$$2x\,(2) - 3x\,(1):\ \frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} - 2y = -6e^t - 2\ldots..(5)$$

$$(5) - (4):\ \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = -10e^t - 2\ldots..(6)$$

Persamaan (6) merupakan PDL ordo dua dalam fungsi y terhadap t. prosedur penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

1. Fungsi komplementer dengan persamaan karaktersitik:

$$m^2 - m - 2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = -1 \\ m_2 = 2 \end{array}\right\} y_c = c_1 e^{-t} + c2e^t$$

2. Integral khusus, misalkan

$$y_p = A e^t + B$$

$$y'_p = A e^t$$

$$y''_p = A e^t$$

subsitusikan ke dalam persamaan (6) didapat

$$A e^t - B e^t - 2A e^t - 2B = -10 e^t - 2$$

$$\left.\begin{array}{l}(a) - 2A = -10 \rightarrow A = 5 \\ (b) - 2B = -2 \rightarrow B = 1\end{array}\right\} \text{didapat } y_p = 5e^t + 1$$

jadi jawaban untukvariabel y sebagai fungsi t adalah:

$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + 5 c_1 e^t + 1$…..(7)

dan $\dfrac{dy}{dt} = c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} + 5e^t$…..(8)

subsitusikan (7) dan (8) ke (3) didapat :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{dy}{dx} - 4y + 4e^t + 1 \\ &= -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} + 5e^t - 4\left(c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + 5e^t + 1\right) + 4e^t + 1 \\ &= -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} + 5e^t - 4c_1 e^{-t} - 4c_2 e^{2t} - 20e^t - 4 + 4e^t + 1 \\ &= -5c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{2t} - 11e^t - 3 \end{aligned}$$

Jadi: $x(t) = -5\, c_1 e^{-t} - 2\, c_2 e^{2t} - 11\, e^t - 3$

Jawaban umum variabel x sebagai fungsi t.

Cara lain dapat juga mensubsitusikan (7) dan (8) ke (5), lalu menyelesaikannya atau mensubsitusikan (7) dan (8) ke (1) atau (2) hasilnya tetap sama.

C. Metode Matrik dan determinan

Metode ini menggunakan operator differensial dalam membentuk matrik dan determinan untuk mendapatkan jawaban umum dan setiap variabel terikat sebagai fungsi variabel bebasnya.

Bentuk umum dari sistem persamaan ditulis sebagai berikut:

(1) $\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x + \frac{d^2y}{dt^2} + b_1 \frac{dy}{dt} + b_2 y = h(x)$

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} + c_1 \frac{dx}{dt} + c_2 x + \frac{d^2y}{dt^2} + d_1 \frac{dy}{dt} + d_2 y = g(x)$

karena persamaan dapat ditulis dalam bentuk operator differensial sebagai berikut:

(1) $(D^2 + a_1 D + a_2)\, x + (D^2 + b_1 D + b_2)\, y = h(x)$

(2) $(D^2 + c_1 D + c_2)\, x + (D^2 + d_1 D + d_2)\, y = gx)$

dari kedua persamaan ini dapat dibuat matrik sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} (D^2 + a_1 D + a_2) & (D^2 + b_1 D + b_2)\, y \\ (D^2 + c_1 D + c_2) & (D^2 + d_1 D + d_2)\, y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h(x) \\ g(x) \end{vmatrix}$$

dengan menggunakan metode cramer didapat :

$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} h(x) & (D^2 + b_1 D + b_2)\, y \\ g(x) & (D^2 + d_1 D + d_2)\, y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (D^2 + a_1 D + a_2) & (D^2 + b_1 D + b_2)\, y \\ (D^2 + c_1 D + c_2) & (D^2 + d_1 D + d_2)\, y \end{vmatrix}} = \frac{\text{Det } A_1}{\text{Det } A}$$

$$y(t) = \frac{\begin{vmatrix} (D^2 + a_1 D + a_2) & h(x) \\ (D^2 + c^1 D + c_2) & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (D^2 + a_1 D + a_2) & (D^2 + b_1 D + b_2)\, y \\ (D^2 + c_1 D + c_2) & (D^2 + d_1 D + d_2)\, y \end{vmatrix}} = \frac{\text{Det } A_2}{\text{Det } A}$$

Bila det A_1 = 0, det A_2 = 0, maka akan diperoleh persamaan differensial yang homogen. Dari persamaan yang diperoleh, jawaban dari PD dapat diselesaikan sesaui dengan cara-cara pada ordonya masing-masing.

Contoh :

Tentukan jawaban dari persamaan:

(1) $2\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 9x + \frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} - 14y = 4$

(2) $\frac{dy}{dx} + x + \frac{dt}{dt} + 2y = -8e^{2t}$

Jawab :

Persamaan dibuat dalam bentuk operator differensial

(1) $(2D^2 + 3D - 9)\,x + (D^2 + 7D - 14)\,y = 4$

(2) $(D+1)\,x + (D+2)\,u = -8\,e^{2t}$

Bentuk matrik utamanya adalah:

$$\begin{vmatrix} (2D^2+3D-9) & (D^2+7D-14) \\ (D+1) & (D+2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ -8e^{2t} \end{vmatrix}$$

selanjutnya dapat dihitung nilai-nilai determinan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \text{Det A} &= (2D^2 + 3D - 9)(D+2) - (D^2 + 7D - 14)(D+1) \\ &= 2D^3 + 3D^2 - 9D + 4D^2 + 4D^2 + 6D - 18 - (D^3 + 7D^2 - 14D + D^2 + 7D - 14) \\ &= D^3 - D^2 + 4D - 4 \\ &= D(D^2+4) - (D^2+4) \\ &= (D-1)(D^2+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det A}_1 &= 4(D+2) + 8e^{2t}(D^2 + 7D - 14) \\ &= D\{4\} + 8 + D^2\{8e^{2t}\} + 7D\{8e^{2t}\} - 112e^{2t} \\ &= 0 + 8 + 32\,e^{2t} + 112\,e^{2t} - 112\,e^{2t} \\ &= 32e^{2t} + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det A}_2 &= -8e^{2t}(2D^2 + 3D - 9) - 4(D+1) \\ &= -16e^2\{e^{2t}\} - 24D\{e^{2t}\} + 72e^{2t} - D\{4\} - 4 \\ &= -64e^{2t} - 48e^{2t} + 72e^{2t} - 0 - 4 \\ &= -40e^{2t} - 4 \end{aligned}$$

(1) Penyelesaian untuk bentuk x = f (t), didapat:

$$x(t) = \frac{32e^{2t} + 8}{(D-1)(D^2+4)}$$

$$(D-1)(D^2+4)\,x = 32e^{2t} + 8$$

a. Fungsi komplementer dengan persamaan karakteristik

$$(m-1)(m^2+4) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_{2,3} = \pm 2i \end{array}\right\}$$ didapat fungsi komplementer dalam bentuk x = f (t).

$$x_c = c_1 e^t + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t$$

b. Integral khusus dengan memisalkan:

$$x_p = A + B e^{2t}$$

$$x'_p = 2B e^{2t}$$

$$x''_p = 4B e^{2t}$$

$$x'''_p = 8B e^{2t}$$

substitusikan ke dalam persamaan didapat:

$$8Be^{2t} - 4Be^{2t} + 8Be^{2t} - 4A - 4Be^{2t} = 32e^{2t} + 8$$

$$8Be^{2t} - 4A = 32e^{2t} + 8$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & -4A = 8 \rightarrow A = -2 \\ (2) & 8B = 32 \rightarrow B = 4 \end{array}\right\}$$ didapat integral khusus dalam bentuk x = f(t).

$$x_p = 4e^{2t} - 2$$

Jadi jawaban umum untuk x(t) adalah

$$x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 e^t + 4e^{2t} - 3$$

(2) Penyelesaian untuk bentuk y = f (t).

$$(2) \quad y(t) = \frac{-40e^{2t} - 4}{(D-1)(D^2+4)}$$

$$(D-1)(D^2+4)y = -40e^{2t} - 4$$

dengan cara yang sama seperti di atas didapat, jawaban umum untuk, y = f(t).

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 e^t - 5e^{2t} + 1$$

D. Soal-soal

Carilah jawaban dari sistem persamaan berikut:

1. (D + 5) x + (D + 4) y = e^{-t}

$(D + 2)x + (D + 1)y = 3$

2. $(D + 5)x + (D + 4)y = e^{-t}$

   $(D - 2)x + (D + 1)y = 3$

3. $(D + 5)x + (D + 4)y = e^{-t}$

   $(2D + 1)x + (D + 1)y = 3$

4. $(D - 1)x + (D - 2)y = 0$

   $(D - 5)x + (2D - 7)y = e^{-t}$

5. $(2D^2 - D - 1)x + (D - 1)y = 0$

   $(D^2 - 1)x + (D - 1)y = 0$

6. $(2D^2 - D - 1)x + (D - 1)y = 0$

   $(2D^2 - D - 2)x + (D^2 + D + 1)y = 8$