BAB IV
PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDO TINGGI

Tujuan pembelajaran

Pada dasarnya, isi dari bab 4. ini, masih mengulangi cara-cara atau prinsif-prinsif yang digunakan untuk menyelesaikan PD ordo dua pada bab sebelumnya. Bentuk-bentuk PD Homogen dan Non Homogen memiliki metode penyelesaian yang relatif hampir sama, seperti pada bab 3.

Pada bab ini sangat diperlukan kemampuan mahasiswa dalam memfaktorkan persamaan-persamaan yang dihadapinya, agar ia dapat menentukan jawaban fungsi komplementer dari PD dan selanjutnya membuat duplikasi persamaan untuk mendapatkan jawaban integral langsungnya. Soal-soal pada tiap akhir sub pokok bahasan merupakan alat evaluasi untuk mengetahui apakah mahasiswa telah memiliki pengetahuan tentang persamaan differensial.

A. Persamaan Differensial Linier Homogen Ordo Tinggi

Jawaban umum untuk PDLH ordo tinggi dengan koefisien konstanta mengikuti prinsif-prinsif yang telah dikembangkan untuk mencari jawaban umum PDLH ordo dua. Dalam bentuk operator, PDLH ordo tinggi ditulis:

$$\left(D^n + a_1D^{n-1} + a_2D^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}D + a_n\right)y = 0 \ldots\ldots(1)$$

dengan a_1 sebagai konstanta.

Jika dapat dicari n suku-suku sebagai solusi yang bebas linier, misalnya y_1, y_2, y_3…..y_n, maka solusi umum untuk (1) adalah: $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots\ldots + c_ny_n$ dengan c_1 sebagai konstanta sebarang.

Dari jawaban umum pada PDLH ordo dua dapat diduga bahwa jawaban untuk fungsi y pada PDLH ordo tinggi adalah $y = e^{mx}$.

Dimana m merupakan harga akar-akar polynom berderajat n dengan bentuk persamaan karakteristik:

$$m^n + a_1m^{n-1} + a_2m^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}m + a_n = 0$$

Artinya untuk mencari jawaban umum PDLH ordo tinggi, diperlukan suatu persamaan karakteristik yang identik dengan bentuk PDLH nya.

Ada tiga kasus yang perlu diperhatikan, yaitu akar-akar real yang berbeda, akar-akar real yang sama, akar-akar bilangan kompleks, dalam menetukan jawaban umum dari PDLH ordo tinggi.

1. Untuk akar-akar yang real dan berbeda

$m_1 \neq m_2 \neq ..... \neq m_n$, maka jawabannya adalah

$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + ... + c_n e^{m_n x}$

Contoh

Selesaikan $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

Jawab

Persamaan karakteristiknya:

$$m^4 - 5m^2 + 4 = 0$$
$$(m^2 - 4)(m^2 - 1) = 0$$
$$(m+2)(m-2)(m+1)(m-1) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= -2 \\ m_2 &= 2 \\ m_3 &= -1 \\ m_4 &= 1 \end{aligned}\right\} \text{didapat jawaban umumnya: } y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{x} + c_4 e^{-x}$$

2. Untuk akar-akar yang real dan sama

$m_1 = m_2 = m_3 ..... = m_n$, maka jawabannya adalah

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} c_1 x^{i-1} e^{mx} = (c_1 + xc_2 + x^2 c_3 + ...)e^{mx}$$

Contoh :

1) Tentukan jawaban umum dari $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Jawab :

Persamaan karakteristiknya adalah

$$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = 0$$
$$(m - 4)^3 = 0$$
$$m_1 = m_2 = m_3 = 1$$

jawaban umumnya adalah

$$y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 x^2 e^{x}$$
$$= (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{x}$$

2) Selesaikan $y^{(4)} - 6y''' + 12y'' - 8y' = 0$

Jawab :

Persamaan karakteristik:

$$m^4 - 6m^3 + 12m^2 - 8m = 0$$
$$m(m^3 - 6m^2 + 12m - 8) = 0$$
$$m(m-2)^3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = 0 \\ m_2 = m_3 = m_4 = 2 \end{array}\right\} y = c_1 e^{ox} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{2x} + c_4 x^2 e^{2x}$$
$$y = c_1 + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2)e^{2x}$$

3. Beberapa akar-akarnya bilangan kompleks

Jika akar-akarnya: $m_{1.2} = \alpha \pm \beta i$, maka jawabannya adalah $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \cos\beta x)$. Jika m = $\alpha \pm \beta i$ sebanyak n yang sama, maka jawabannya adalah:

$$y = e^{\alpha x}[(c_1 \beta x + c_2\, \beta x) + x(c_3 \cos\beta x + c_4 \sin\beta x) + x^2(c_5 \cos\beta x + c_6 \sin\beta x) + \ldots.$$
$$\ldots + x^m (c_m \cos\beta x + c_{m+1} \sin\beta x)]$$

Contoh :

Tentukan solusi umum dari $y''' - y'' + 9y' + 9y = 0$

Jawab :

Persamaan karakteristiknya $m^3 - m^2 + 9\,m - 9 = 0$

$$(m-1)(m^2+9) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = 1 \\ m_2 = m_3 \pm 3i \\ \alpha = 0 \\ \beta = 3 \end{array}\right\} \text{didapat}$$

$y = c_1 e^{x} + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x$, sebagai jawaban umumnya

B. Soal : Tentukan jawaban umum dari soal-soal berikut.

1. $y''' + 2y'' - 8y' = 0$
2. $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$
3. $6y''' + 7y'' - y' - 2y = 0$
4. $y''' + 2y'' - 19y' - 20y = 0$
5. $y''' + 3y'' + 28y' + 26y = 0$
6. $y''' - y'' + 2y = 0$
7. $2y''' - y'' - 10y' - 7y = 0$
8. $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0$
9. $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$
10. $y^{(4)} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = 0$

C. Persamaan Differensial Linier Ordo Tinggi Tak homogen

Jawaban umum untuk PDL non homogen ordo tinggi, sama seperti dalam menentukan jawaban umum untuk PDL non homogwn ordo dua. Metode yang mudah digunakan adalah metode duplikasi f(x), dengan terlebih dahulu menentukan jawaban fungsi komplementernya. Integral khusus, dengan memisalkan y_p sama dengan model dari f(x) dan menurunkannya sampai tingkat (ordo) tertinggi yang terkandung dalam persamaan yang harus diselesaikan.

Contoh :

Selesaikan $y''' - 3y'' + 4y' = xe^{2x}$

Jawab :

1. Fungsi komplementer dengan persamaan karakteristik

$$m^3 - 3m^2 + 4 = 0$$
$$(m+1)(m-2)^2 = 0$$
$$\left.\begin{aligned} m_1 &= -2 \\ m_2 = m_3 &= 2 \end{aligned}\right\} y = c_1 e^{-x} + c_2\, e^{2x} + c_3\, x\, e^{x}$$

2. Integral khusus, karena f(x) = x e^{2x} dan r = 2, akar-akar berkelipatan 2 maka dimisalkan $y_p = x^2\, e^{2x}\,(Ax + B)$. Substitusikan y_p dan turunannya sampai tiga kali, ke dalam persamaan, sehingga didapat:

$[8A\, x^3 + (36A + 8A)\, x^2 + (36A + 24B)\, x + (6A + 12B)]\, e^{2x} - 3\, [4A\, x^3 + (12A + 4B)\, x^2 + (6A + 8B)\, x + 2B]\, e^{2x} + 4\, [Ax^3 + Bx^2]\, e^{2x} = x\, e^{2x}$

atau $[18A\, x + (6A + 6B)]\, e^{2x} = x\, e^{2x}$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 18A = 1 \\ (2)\ 6A + 6B = 0\end{array}\right\} A = \tfrac{1}{18}$$

$$B = -\tfrac{1}{18}$$

$$\text{jadi } y_p = \tfrac{1}{18} x^2 e^{2x} (x-1)$$

Jawabanumumdaripersamaan:

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x} + \tfrac{1}{18} x^2 e^{2x} (x-1)$$

D. Soal

Selesaikan

1. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^x - x^2$
2. $y''' + y'' - 5y' + 3y = e^{-x} - \sin x$
3. $y''' + 3y'' - 4y = e^{-2x}$
4. $y''' + y'' - 2y = \sin x$
5. $y''' + 4y'' + y' - 26y = \cos 2x$
6. $y^{(4)} - 3y''' + 2y'' = 5 \sin x$
7. $y^{(4)} + 2y''' - 3y'' = 12 \cos x$
8. $y^{(4)} - 5y''' + 7y'' - 5y' + 6y = 6 e^{2x}$
9. $y^{(4)} + 4y''' + 4y = 4 x^2$
10. $y^{(4)} + 4y''' - 5y'' = 5 \sin 4x$