BAB II
PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDO SATU

<u>Tujuan Pembelajaran</u>

Bab 2. ini, merupakan lanjutan dari pembahasan PD bab1, yaitu jenis-jenis persamaan differensial ordo satu dan cara-cara penyelesaiannya. Diantaranya adalah Persamaan Terpisah, PD Homogen Ordo Satu, PD Exacx dan Factor Integrasi, serta contoh-contoh soal.

Pada tiap sub pokok bahasan diberikan soal-soal yang diharapkan dapat dikerjakan oleh mahasiswa, sesuai dengan contoh-contoh yang diberikan pada tiap jenisnya masing-masing.

A. Persamaan Differensial Variabel Terpisah

Persamaan differensial $\frac{dy}{dx} + F(x, y) = 0$ adalah berordo satu dan derajat satu. Persamaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. Dengan $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ dapat dinyatakan sebagai fungsi x, atau fungsi y atau keduanya, x dan y atau $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ hanya merupakan konstanta.

Persamaan $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, disebut sebagai persamaan terpisah apabila dapat dinyatakan oleh persamaan :

$f(x).g(y)dx + p(x).q(y)dy = 0$ dimana f(x) dan p(x) merupakan fungsi x dan g(y) dan q(y) sebagai fungsi y. Fungsi x dan fungsi y dapat dipisahkan dan berada pada kelompoknya masing-masing.

Contoh: $(x + 3xy)dx + (yx + 6x)dy = 0$ adalah persamaan terpisah, sebab dapat dinyatakan dalam bentuk $x(1 + 3y)dx + x(y + 6)dy = 0$, sehingga dapat dilakukan pengelompokan variable dalam bentuk:

$$dx + \frac{(y + 6)}{3y + 1}dy = 0$$

Contoh: $(y - x)dx + (xy - 2x)dy = 0$, bukan persamaan terpisah, sebab tidak dapat dibuat dalam bentuk $f(x).g(y)dx + p(x).q(y)dy = 0$. Atau tidak dapat dikelompokkan pada variabelnya masing-masing.

B. Solusi Persamaan Terpisah

Persamaan terpisah $f(x).g(y)dx + p(x).q(y)dy = 0$ dapat diselesaikan dengan prosedur sebagai berikut:

1. Bagi persamaan dengan g(y), p(x), sehingga didapat:

   $$\frac{f(x)}{p(x)}dx + \frac{g(y)}{q(y)}dy = 0 \quad ; \quad p(x) \neq 0 \quad ; \quad q(y) \neq 0$$

2. Lakukan integrasi persamaan, sehingga didapat

   $$F(x) + G(y) = C, \text{sebagai solusi umum PD}$$

3. Bila nilai-nilai syarat batas diketahui, maka subsitusikan nilai tersebut ke dalam hasil integral sehingga nilai konstanta C didapat. Persamaan yang didapat adalah solusi khusus dari PD. Selanjutnya dapat diekspresikan dalam bentuk gambar atau grafik.

Contoh 1

Selesaikan $\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0; \text{bila } y(0) = 4$

Jawab :

$$\frac{x.dx + y.dy = 0}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C} \int$$

$$x^2 + y^2 = 2C \quad (\text{solusi umum})$$

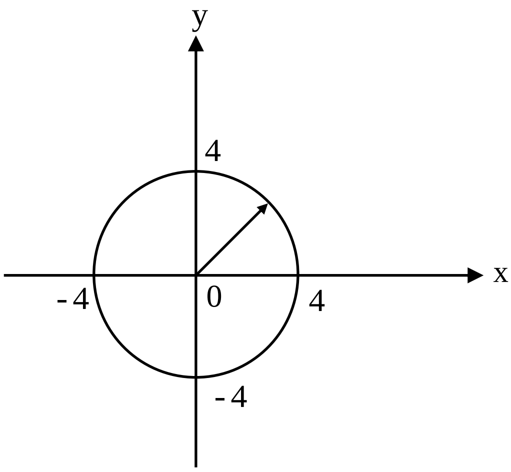
Syarat batas

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 4 \end{matrix}\right\} \quad 0 + 16 = 2C$$

$$C = 8$$

$$x^2 + y^2 = 16 \quad (\text{solusi khusus})$$

Merupakan lingkaran berpusat di p(0,0) dengan jari-jari r = 4, dapat di ekspresikan dalam bentuk gambar sebagai berikut:



Gbr. 2.1 Lingkaran $x^2 + y^2 = 16$

Contoh 2

Tentukan jawaban khusus dari PD berikut :

$(y - x^2 y)\,dy - (4x + xy^2)\,dx = 0,$ bila $y(2) = 1$

Jawab : $y(1 - x^2)\,dy - x(4 + y^2)\,dx = 0$

$$\frac{y}{(y^2 + 4)}\,dy - \frac{x}{(1 - x^2)}\,dx = 0$$

Integral langsung, misalnya: $U = (y^2 + 4)$ dan $V = (1 - x^2)$

$$\frac{y}{U}.\frac{du}{2y} - \frac{x}{V}.\frac{dv}{-2x} = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\ln U + \tfrac{1}{2}\ln V = \ln C$$

$$(y^2 + 4)^{1/2}.(1 - x^2)^{1/2} = C$$

$$(y^2 + 4)(1 - x^2) = C^2 \text{ (solusiumum)}$$

Syaratbatas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right\} (1 + 4)(1 - 4) = C^2$$

$$-15 = C^2$$

jadi $(y^2 + 4)(1 - x^2) = -15$ (solusikhusus)

C. Soal

Tentukan jawaban umum dari PD berikut:

1. $x^2 dy + y^2 dx = 0$
2. $xdy - ydx = 0$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y}{1+x}$
4. $(1-x^2)\,dy + (1+y^2)\,dx = 0$
5. $y \sec x\, dy + \sqrt{1-y^2}\, dx = 0$
6. $dy + y \tan x\, dx = 0$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}$
8. $\sec x\, dy + \sec y\, dx = 0$
9. $xy\, dy + (x^2 + 1)\, dx = 0$
10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - xy^2}{x^2 y - y}$
11. $y' = x^3(1-y)$ *bila* $y(0) = 3$
12. $y' = 2x\cos^2 y$ *bila* $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$
13. $y' = y \sin x$ *bila* $y(\pi) = -3$
14. $y' = 8x^3 e^{-2y}$ *bila* $y(1) = 0$
15. $y' = (1+y^2)\tan x$ *bila* $y(0) = \sqrt{3}$

D. Persamaan Differensial Homogen Ordo Satu

Persamaan differensial homogen ordo satu f(x, y, y[1]) = 0. Secara umum ditulis dalam bentuk, $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)\ atau\ M(x,y)\,dy + N(x,y)\,dy = 0$. Persamaan ini dinyatakan homogen jika $f(x,y) = g(\frac{y}{x})$.

Contoh 1

Persamaan $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2x-y)}{(x+y)}$ adalah homogen

Karena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-y)}{(x+y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x+y} - \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+y} - \frac{y/x}{1+y}$$

Jadi : $\dfrac{dy}{dx} = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$; merupakan syarat PD homogen

Persamaan homogen dalam bentuk persamaan y dan x didapat di transformasi (diubah) menjadi bentuk persamaan v dan x, sehingga menjadi bentuk variable terpisah dengan cara mensubsitusikan,

$$y = vx \; dan \; dy = v\,dx + x\,dv$$

Bukti:

Bila M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 maka dapat ditulis sebagai $\dfrac{dy}{dx} = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$

dengan subsitusi y = v dx an dy = v dx + x dv sehingga:

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) \text{ dapat ditulis}$$

$$v.dx + x.dv = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

$$v - g(v) + x\frac{dv}{dx} = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v - g\,v} = 0$$

Hasil integralnya adalah :

$$\ln x + F(v) = C$$

$$\ln x + F\left(\frac{y}{x}\right) = C \text{ dimana } \int \frac{dv}{v - g\,(v)} = F(v)$$

Contoh 2

Tentukan jawaban umum dari $(xy - y^2)\,dx - x^2\,dy = 0$

Jawab :

Subsitusikan y = v.x dan dy = v dx + x dv didapat:

$$(x^2v - v^2x^2)\,dx - x^2(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$x^2(v - v^2)\,dx - x^2\,v\,dx - x^3\,dv = 0 \quad : x^2$$

$$(v - v^2)\,dx - v\,dx + x\,dv = 0$$

$$v^2\,dx + x\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v^2} = 0$$

$$\ln x - \frac{1}{v} = C \;\; atau$$

$$\ln x - \frac{x}{y} = \ln C$$

$$y = \frac{x}{\ln C\,x}$$

Dalam bentuk lain :

$$\ln x - \ln e^{\frac{x}{y}} = \ln C$$

$$\ln x = \ln C + \ln e^{\frac{x}{y}}$$

$$x = C\,.e^{\frac{x}{y}}$$

E. Soal-soal

1. $(x^2 + y^2)\,dx = 2xy\;dy$
2. $y\,dx - x\,dy = 0$
3. $y^3\,dx + x^3\,dy = 0$
4. $(x - 3y)\,dx + x\,dy = 0$
5. $(y^2 - xy)\,dx + x^2\,dy = 0$
6. $(6x + y)\,dx + (x - 2y)\,dy = 0$
7. $(y - 2x)\,dx - 2x\,dy = 0$
8. $\left[x + x\sin\frac{x}{y} - y\cos\frac{x}{y}\right]dx + x\cos\frac{x}{y}\,dy = 0$
9. $xy\,dx - (x^3 + 3y^2)\,dy = 0$
10. $(x - y)e^{\frac{x}{y}}\,dx + (xe^{\frac{x}{y}} + x)\,dy = 0$

F. Persamaan Differensial Exact dan Factor Integrasi

Fungsi f(x,y)=C, merupakan keluarga suatu kurva, memiliki differensial total df(x,y) adalah df(x,y) = $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy = 0$

atau $df(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

persamaan ini merupakan pesamaan differensial exact apabila : $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Bukti: untuk $\quad M(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x \partial y}$

$$N(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Jadi : $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ merupakan syarat PD exact.

Dari $\frac{dM}{dx} = M(x, y)$

$$dM = M(x, y)\, dx$$

Integral kearah x adalah

$$M = \int_x M(x, y)\, dx + F(y)$$

Bila diturunkan kearah y, nilainya harus sama dengan $N(x, y)$ jadi

$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\, dx\right) + F'(y)$$

$$F'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\, dx\right)$$

$$F(y) = \int N(x, y)\, dy - \int \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\, dx\right) dy$$

Jadi : $f(x, y) = \int_x M(x, y)\, dx + \int_y N(x, y)\, dy - \int \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\, dx\right) dy + C$

Merupakan jawaban dari PD exact.

Contoh : periksa apakah $xy^2 dx + x^2 y dy = 0$ merupakan PD exact dan tentukan jawabannya.

Jawab : $\left.\begin{array}{l} M = xy^2 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy \\ N = x^2 y \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy \end{array}\right\} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ jadi Exact.

Dari :

$$\frac{dM}{dx} = xy^2$$
$$dM = x.y^2 dx$$
$$f(x,y) = M = \tfrac{1}{2}x^2y^2 + F(y), \text{Turunannya ke arah y, harus sama dengan x2y}$$

Jadi :

$$x^2y = x^2y + F'(y)$$
$$F'(y) = 0$$
$$F(y) = C$$

Didapat $M = \tfrac{1}{2}x^2y^2 + C$

Atau : $\tfrac{1}{2}x^2y^2 = C$ adalah solusi umumnya.

Cara lain.

Dengan rumus :

$$M = \int xy^2dx + \int x^2ydy - \int \frac{\partial}{\partial y}\left(\int xy^2dx\right)dy + C$$
$$M = \tfrac{1}{2}x^2y^2 + \tfrac{1}{2}x^2y^2 - \int \frac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{1}{2}x^2y^2\right)dy + C$$
$$M = x^2y^2 - \int x^2y.dy + C$$
$$M = x^2y^2 + \tfrac{1}{2}x^2y + C$$
$$M = \tfrac{1}{2}x^2y^2 + C \rightarrow \tfrac{1}{2}x^2y^2 = \text{C adalah solusi umum.}$$

G. Soal-soal Latihan

Periksa PD berikut apakah Exact dan tentukan jawaban umumnya

1. $2xydx + x^2dy = 0$
2. $(3x^2 - y)dx - xdy = 0$
3. $(x + y)dx + xdy = 0$
4. $(e^y + y.e^x)dx + (xe^y + e^x)dy = 0$
5. $(x + y^2)dy + (y - x^2)dx = 0$
6. $\left(-\frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y} + \cos y\right)dy = 0$
7. $(x^2 + \ln y)dx + \frac{x}{y}dy = 0$
8. $\frac{x^2 + 2xy + y}{(x+y)^2}dx - \frac{x^2 + x}{(x+y)^2}dy = 0$

9. $(1 + y^2)dx + (x^2 y + y)dy = 0$ 10. $e^{xy}(y\cos x - \sin x)dx + xe^{xy}\cos x dy = 0$

H. Faktor Integrasi

Bila $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, tidak exact maka dapat dibuat menjadi PD exact dengan cara mengalikan persamaan dengan suatu faktor integral F(x, y). Dengan mengalikan F(x, y) ke dalam persamaan akan didapat:

$$F.M\,dxy + F.N\,dy = 0$$

persamaan ini menjadi exact dengan syarat: $\dfrac{\partial(FM)}{\partial y} = \dfrac{\partial(FN)}{\partial x}$

$$F.\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial F}{\partial y} = F\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial F}{\partial x}$$

atau $\dfrac{1}{F}\left(N\dfrac{\partial F}{\partial x} - M\dfrac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$

Dapat dilihat ada beberapa kasus yang mungkin terjadi:

1. Bila F hanya sebagai fungsi x, maka $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$ dan $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{dF}{dx}$ sehingga:

$$\frac{1}{F}N\frac{dF}{dx} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{1}{F}.dF = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx$$

$$\ln F = \int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx$$

$$F = \exp.\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx$$

merupakan faktor integrasi agar PD menjadi exact.

2. Bila F hanya sebagai fungsi y, maka $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ dan $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{dF}{dy}$, sehingga:

$$\frac{1}{F} M \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{1}{F} . \partial F = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dy$$

$$F = \exp . \int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx$$

Menyatakan faktor integral agar PD menjadi exact.

Dari kedua faktor integrasi di atas terlihat bahwa(x,y) sangat ditentukan oleh:

$$\frac{1}{F}\left(N \frac{\partial F}{\partial x} - M \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

atau : $$\frac{dF}{F} = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{\alpha \ N + \beta \ M} .dz$$

dimana Z merupakan suatu fungsi dari x saja atau dari y saja atau dari x dan y. Bila Z merupakan fungsi x saja, maka $\alpha = 1$ dan $\beta = 0$

Bila Z merupakan fungsi y saja, maka $\beta = -1$ dan $\alpha = 0$

Bila Z merupakan fungsi x dan y, maka $\alpha = 1$ dan $\beta = 1$

Contoh :

Selesaikan $(3 - 2y)\, dx + (x^2 - 1)\, dy = 0$

Jawab :

$$\left.\begin{aligned} M = (3-2y) &\rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -2 \\ N = (x^2-1) &\rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \end{aligned}\right\} \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \ \text{(Tidak Exact)}$$

Faktor integrasi:

$$F = \exp \int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx$$

$$= \exp \int \frac{1}{x^2 - 1} \left(-2 - 2x\right) dx$$

$$= \exp \int \frac{-2(1+x)}{(x+1)(x-1)}\,dx$$

$$= \exp . -2 \ln (x-1)$$

$$= (x-1)^{-2} \quad \text{adalah faktor integrasi}$$

kalikan ke dalam persamaan, didapat:

$$\frac{(3-2y)}{(x-1)^2}\,dx + \frac{(x^2-1)}{(x-1)^2}\,dy = 0$$

$$\frac{3-2y}{(x-1)^2}\,dx + \frac{(x+1)}{(x-1)}\,dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{-2}{(x-1)^2} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{-2}{(x-1)^2} \end{aligned}\right\} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{(Exact)}$$

$$F(x,y) = \int \frac{(x+1)}{(x-1)}\,dy + F(x)$$

$$= \frac{(x+1)}{(x-1)}\,y + F(x)$$

Turunan ke arah x, harus sama dengan M(x,y), yaitu:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-2y}{(x-1)^2} + F'(x) = \frac{3-2y}{(x-1)^2}$$

$$F'(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$F(x) = \frac{-3}{(x-1)} + C$$

$$\text{jadi } F(x,y) = \frac{(x+1)}{(x-1)}\,y - \frac{3}{(x-1)} + C$$

$$y\,(x+1) - 3 = C\,(x-1)$$

$$y = \frac{C\,(x-1)+3}{(x+1)} \quad \text{adalah jawaban umum dari PD}$$

I. Soal-soal

Tentukan jawaban dari:

1. $(x^2 + 2y)\,dx - x\,dy = 0$
2. $(y^2 + 3)\,dx + (2xy - 4)\,dy = 0$
3. $(5xy + 4y^2 + 1)\,dx + (2y^3 - x)\,dy = 0$
4. $(2xy^2 + y)\,dx + (2y^3 - x)\,dy = 0$
5. $(4xy^2 + 6y)\,dx + (5x^2y + 8x)\,dy = 0$
6. $(x^2 + y^3 + x)\,dx + xy\,dy = 0$
7. $y^2\,dx + (x^2 - xy + 3)\,dy = 0$
8. $(x + y + 1)\,dx - (y - x + 3)\,dy = 0$
9. $(x + y + 1)\,dx - (x - y - 3)\,dy = 0$
10. $(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

J. Persamaan Differensial Linier Ordo Kesatu

Persamaan differensial yang berordo kesatu yang linier antara variabel terikat dan turunan pertamannya dinyatakan sebagai PDL ordo kesatu. Persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = Q(x)$$

Bentuk persamaan menjadi homogen jika Q(x) = 0, penyelesaian selanjutnya adalah:

$$p(x)\,dx + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\ln y + \int p(x)\,dx = \ln C$$

$$y \, . \, e^{\int p(x)\,dx} = C$$

turunan dari bentuk ini adalah:

$$d\left[y\,.\,e^{\int p(x)dx} \right] = y\,.\,e^{\int p(x)dx}\,.\,p(x)\,dx + e^{\int p(x)dx}\,dy = 0$$

$$d\left[y\,.\,e^{\int p(x)dx} \right] = e^{\int p(x)dx}\,\left(p(x)\,.\,y\,dx + dy \right)$$

Bentuk ini memperlihatkan bahwa dengan mengalikan faktor $e^{\int p(x)dx}$ ke dalam persamaan, maka bentuknya menjadi Exact.

Artinya, $e^{\int p(x)dx}$ adalah faktor integrasi, untuk membuat PDL menjadi Exact, sehingga persamaan menjadi:

$$e^{\int p(x)dx}\left[p(x).y\,dx + dy\right] = e^{\int p(x)dx}.Q(x)$$

$$\text{atau } d\left(y.e^{\int p(x)dx}\right) = e^{\int p(x)dx}.Q(x)$$

dan jawaban selanjutnya adalah :

$$y.e^{\int p(x)} = \int e^{\int p(x)dx}.Q(x)\,dx + C$$

Contoh :

Selesaikan : x^2 dy – sin 3x dx + 2xy dx = 0

Jawab :

Persamaan dapat (bagi persamaan dengan x^2dx).

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}.y = \frac{\sin 3x}{x^2} \qquad e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = \sin 3x$$

$$d\left(x^2y\right) = \sin 3x\,dx$$

$$x^2y = \int \sin 3x\,dx + C$$

$$x^2y = -\tfrac{1}{3}\cos 3x + C$$

$$3x^2y + \cos 3x + C = 0 \quad \text{(JawabanUmum)}$$

K. Soal-soal

1. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$
2. (x + 1) dy – (x^2 – y – 1) dx = 0
3. (1 - x^2) $\frac{dy}{dx}$ +xy = ax
4. y’ + y tan x = sec x
5. $\frac{dy}{dx}$ - $\frac{1}{x}$- y = x e^x
6. y’ – a y = f(x)
7. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$
8. y’ + $\frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$
9. $\frac{dy}{dx}$ + y cotg x = sec x
10. y’ + y f(x) = f(x)

L. Persamaan Bernoulli

Bentuk umum dari persamaan bernoulli adalah $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x).\, y^n$.

Prosedur penyelesaiannya dengan cara sebagai berikut:

1. Bagi persamaan dengan y^n, didapat

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x).y^{1-n} = Q(x)\ldots\ldots(*)$$

2. Misalkan U = y^{1-n} sehingga didapat $\frac{du}{dx} = (1\text{-}n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

3. Kalikan (*) dengan (1-n) sehingga didapat

$$(1 - n)\, y^{-n}\,\frac{dy}{dx} + (1 - n)\, p(x)\, y^{1-n} = (1 - n)\, Q(x)$$

atau $\frac{du}{dx}$ + p'(x) U = Q'(x) adalah PDL

yang dapat diselesaikan dengan perkalian faktor integrasi.

Contoh :

Selesaikan $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x\,y^2$

Jawab :

Bagi persamaan dengan y^2, didapat :

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-1} = x$$

misalkan $U = y^{-1} \rightarrow \frac{du}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$

kali persamaan dengan negatif (-1)

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y^{-1} = -x$$

atau :

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x} y^{-1} = -x \qquad e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{1}{x^2} U = -1$$

$$d\left(\frac{1}{x} U\right) = -dx$$

$$\frac{U}{x} = -\int dx + C$$

$$U = -x^2 + Cx$$

$$y^{-1} = -x^2 + Cx$$

$$y = \left(Cx - x^2\right)^{-1} \text{ ; jawaban umum.}$$

M. Soal

1. $\frac{dy}{dx} + y = xy^4$
2. $\frac{dy}{dx} + y = y^2 e^x$
3. $2\frac{dy}{dx} + y = y^3 (x-1)$
4. $y' - 2y \tan x = y^2 \tan^2 x$
5. $y' + y \tan x = y^3 \sec^4 x$
6. $y\frac{dy}{dx} + 2x = 5y^3$
7. $y' + 2y = 5x\, y^4$
8. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = y^2 \sin x$
9. $y^2 dx + (3y-1)\, dy = 0$ dalam bentuk $\frac{dy}{dx}$
10. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3} y = \frac{1}{3}(1-2x)\, y^4$
11. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2x} y = \frac{x}{y^3}$
12. $\frac{dy}{dx} + xy^3 = y$

N. Subsitusi dan Transformasi

Persamaan dengan koefisien linier dalam bentuk (ax + by+ c) dx + (px + qy + r) dy = 0 yang sulit untuk dinyatakan atau diselesaikan seperti PD yang telah dibicarakan didepan, dapat ditransformasikan menjadi salah satu diantara PD yang dapat diselesaikan.

Transformasi dilakukan dengan cara membuat ulang persamaan dalam bentuk variabel baru yang mungkin dapat menyelesaikan PD.

Prosedurnya adalah sebagai berikut:

1. Jika c = r = 0, persamaan berbentuk (ax + by) dx + (px + qy) dy = 0 persamaan ini homogen. Misalkan y = v.x
2. Selanjutnya bila $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = k$, maka dapat ditransformasikan Z = ax + by dan dz = a dx + b dy, untuk merubah persamaan awal ke bantuk variabel lain.
3. bila $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$, maka dapat ditransformasikan;

   U = ax + by + C   dan du = a dx + b dy

   v = px + qy +r   dan dv = p dv + q dy

   sehingga:

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} du & b \\ dv & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}} = \frac{q\,du - b\,dv}{a\,q - b\,p}$$

$$dy = \frac{\begin{vmatrix} a & dy \\ p & dv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}} = \frac{a\,dv - p\,du}{a\,q - b\,p}$$

subsitusikan harga dx dan dy dalam persamaan sehingga diperoleh persamaan homogen, yang dapat diselesaikan.

Cara lain adalah dengan mengambil bentuk-bentuk ax + by + c = 0 sebagai persamaan garis yang berpotongan dengan px + qy + r = 0. dengan memisalkan perpotongannya dititik (h, k) maka substitusikan:

$$x = u + h \rightarrow dx = du$$
$$y = v + k \rightarrow dy = dv$$

ke dalam persamaan awal sehingga didapat persamaan homogen yang dapat diselesaikan.

Contoh 1

Selesaikan (3x – 2y + 1) dx – (6x – 4y + 1) dy = 0

Jawab :

Karena $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{1}{2}$, maka ambil transformasi Z = 3x – 2y dan dz = 3 dx – 2dy;

dx = $\frac{1}{3}dz + \frac{2}{3}dy$

Sehingga diperoleh persamaan baru:

$$(z+1)\left(\frac{1}{3}dz + \frac{2}{3}dy\right) - (2z+1)dy = 0$$
$$\frac{1}{3}(z+1)dz + \frac{2}{3}(z+1)dy - (2z+1)dy = 0$$
$$\frac{1}{3}(z+1)dz - \left(\frac{2}{3}z + \frac{2}{3} - 2z - 1\right)dy = 0$$
$$\frac{1}{3}(z+1)dz - \left(\frac{4}{3}z + \frac{1}{3}\right)dy = 0$$
$$\frac{(z+1)}{(4z+1)}dz - dy = 0, \text{ persamaanterpisah.}$$

$$\frac{1}{4}\int dz + \frac{3}{4}\int \frac{dz}{4z+1} - \int dy = c$$
$$\frac{1}{4}z + \frac{3}{16}\ln(4z+1) - y = c$$

$$\text{Misal}: u = 4z + 1$$
$$du = 4\,dz$$
$$dz = \frac{1}{4}du$$

$$z + \frac{3}{4}\ln(4z+1) - 4y = c_1 \rightarrow c_1 = 4c$$

Substitusikan nilai $z = 3x - 2y$

$$(3x - 2y) + \frac{3}{4}\ln(2x - 8y + 1) - 4y = c_1$$

$$3x - 6y + \frac{3}{4}\ln(2x - 8y + 1) = c_1$$

$$x - 2y + \frac{1}{4}\ln(2x - 8y + 1) = c_2 \rightarrow c_2 = \frac{1}{3}c_1$$ adalah solusi yang dicari.

Contoh 2

Selesaikan $(2x - 4y - 10)\,dx + (5x - y - 7)\,dy = 0$

Jawab :

Karena $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ maka digunakan transformasi:

$u = 2x - 4y - 10 \rightarrow du = 2dv - 4dy$

$v = 5x - y - 7 \rightarrow dv = 5dx - dy$

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} du & -4 \\ dv & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & du \\ 5 & dv \end{vmatrix}} = \frac{-du + 4dv}{18}$$

$$dx = \frac{\begin{vmatrix} 2 & du \\ 5 & dv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2dv - 5du}{18}$$

Subsitusikan ke dalam persamaan awal, dan misalkan z = u/v atau u = z . v ; dengan turunan du = z dv + v dz dan penjabaran selanjutnya didapat;

$$\frac{dv}{v} + \frac{z+5}{(z^2 + z - 2)}dz = 0$$

$$\frac{dv}{v} + \frac{2dz}{(z-1)} - \frac{dz}{z+2} = 0$$

hasil integral: $\ln v + \int \frac{2}{(z-1)} dz - \int \frac{1}{(z+2)} dz = \ln c$

$$\ln v + 2\ln(z-1) - \ln(z+2) = \ln c$$

$$\ln v + \ln \frac{(z-1)^2}{(z+2)} = \ln c$$

$$\ln v = \ln c \frac{(z+2)}{(z-1)^2}$$

$$v = c.(z+2)(z-1)^{-2}$$

$$5x - y - 7 = c\left(\frac{u}{v} + 2\right)\left(\frac{u}{v} - 1\right)^{-2}$$

$$5x - y - 7 = c\left(\frac{2x-4y-10}{5x-y-7} + 2\right)\left(\frac{2x-4y-10}{5x-y-7} - 1\right)^{-2}$$

$$5x - y - 7 = c\left(\frac{2x-4y-10+10x-2y-14}{5x-y-7}\right)\left(\frac{2x-4y-10-5x+y+7}{5x-y-7}\right)^{-2}$$

$$5x - y - 7 = c\left(\frac{12x-6y-24}{5x-y-7}\right)\left(\frac{-3x-3y-3}{5x-y-7}\right)^{-2}$$

$$(5x-y-7)\left(\frac{-3x-3y-3}{5x-y-7}\right)^{2} = c\left(\frac{12x-6y-24}{5x-y-7}\right)$$

$$(-3x-3y-3)^2 = c(12x-6y-24)$$

$$(-3)^2 \leftarrow 9(x+y+1)^2 = 6c(2x-y-4)$$

$$(x+y+1)^2 = c_1(2x-y-4) \rightarrow c_1 = \frac{6}{9}c \rightarrow \frac{(x+y+1)^2}{(2x-y-4)} = C$$

adalah solusi dari persamaan awal

Cara kedua :

$(2x - 4y - 10)\,dx + (5x - y - 7)\,dy = 0$

Titik potong (h, k) = (1,-2)

Misal: $x = u + 1 \rightarrow dx = du$

$y = v - 2 \rightarrow dy = dv \rightarrow (2u + 2 - 4v + 8 - 10)\,dx$

$+ (5u + 5 - v + 2 - 7)\,dv = 0$

(2u -4v) dx – (5u - v) dv = 0

Persamaan menjadi (2u – 4v)du + (5u – v) dv = 0

Misal : v = u.z $\rightarrow$ dv = u dz + z du

Persamaan menjadi :

(2u – 4uz) dv + (5u - uz) (udz + zdu) = 0

(2 + z - z ^{2})du + (5-z) udz = 0

$$\frac{du}{u} + \frac{(5-z)}{(1+z)(2-z)}dz = 0$$

$$\frac{du}{u} + \frac{(5-z)}{(1+z)(2-z)} = 0$$

$$\ln u + 2\ln(z+1) - \ln(2-z) = \ln c$$

$$\ln u + \ln\left(\frac{v+u}{u}\right)^2 - \ln\left(\frac{2u-v}{u}\right) = \ln c$$

$$\ln\left[u\,\frac{(v+u)^2}{u^2}\,\frac{u}{(2u-v)}\right] = \ln c$$

$$\frac{(v+u)^2}{(2u-v)} = c$$

$$\frac{(y+2+x-1)^2}{[2(x-1)-y-2]} = c$$

$$\frac{(x+y+1)^2}{(2x-y-4)} = c \text{ (jawaban umum)},\text{sama seperti contoh di atas.}$$

O. Soal

1. (3y – 2x +7) dx + (6y – 4x + 3) dy = 0
2. (2x – 5y + 3) dx – (2x + 4y – 6) dy = 0
3. (x – y – 1) dx + (3x – 3y +1) dy = 0
4. (2x – y +3) dx + (4x – 2y + 6) dy = 0
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x - y + 8}{2x - y - 1}$