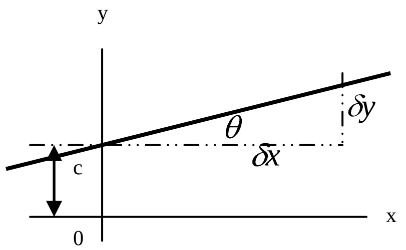
PENERAPAN DIFERENSIAL
BAGIAN I

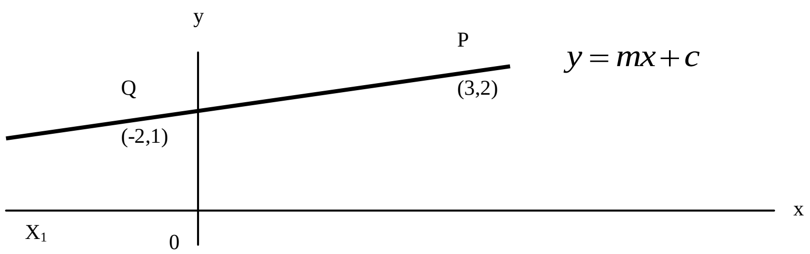
Persamaan garis lurus

Persamaan dasar suatu garis lurus adalah $y = mx + c$



Dengan *m* = kemiringan (slope) = $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}, c =$ perpotongan dengan sumbu-y riil. Perhatikan bahwa jika skala *x* dan *y* identik, maka $\frac{dy}{dx} = \tan\theta$

Sebagai contoh, untuk menentukan persamaan garis yang melalui titik P(3,2) dan titik Q(-2,1), kita dapat mencarinya sebagai berikut :



$y = mx + c$

Garis melalui P, yaitu bila $x = 2, y = 3 \therefore 2 = m3 + c$

Garis melalui Q, yaitu bila $x = -2, y = 1 \therefore 1 = m(-2) + c$

Jadi kita peroleh sepasang persamaan simultan yang akan memberikan harga *m* dan *c* yang dicari. Karena itu persamaan garisnya adalah…………………

Kita dapatkan bahwa *m*= 1/5 dan *c* = 7/5, sehingga persamaan garisya

$y = \frac{x}{5} + \frac{7}{5}, yai$ $\boxed{5y = x + 7}$

Kadang-kadang diberikan harga kemiringan, *m'*, garis yang melalui sebuah titik (x_1,y_1) tertentu dan kita harus mencari persamaan garisnya. Dalam hal ini lebih enak kita gunakan bentuk

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Sebagai contoh, persamaan garis yang melalui titik (5,3) dengan kemiringan 2 adalah……….yang dapat disederhanakan menjadi………………………………………

$y - 3 = 2(x - 5)$

Yaitu $y - 3 = 2x - 10) \therefore$ $\boxed{Y = 2x - 7}$

Serupa dengan itu, persamaan garis yang melalui titik (-2,-1), dengan kemiringan ½ adalah

$$y-(-1)=\frac{1}{2}(x-(-2))$$

$$\therefore y+1=\frac{1}{2}(x+2)$$

$$2y+2=x+2$$

$$\therefore y=\frac{x}{2}$$

Dengan jalan yang sama, persamaan garis yang melalui titik (2,-3) dengan kemiringan (-2) adalah ………………

Y = 1 – 2x

Karena

$$y-(-3)=-2(x-2)$$

$$\therefore y+3=-2x+4 \therefore y=1-2x$$

Baik. Jadi secara umum, persamaan garis yang melalui titik (x_1,y_1) dengan kemiringan *m* adalah………………

$$\boxed{y-y_1=m(x-x}$$

Satu contoh terakhir:

Jika koordinat titik P adalah (3,4) dan kemiringan *m* garis yang melalui P adalah 2,maka persamaan garis itu adalah

$$y-3=2(x-4)$$

$$=2x-8$$

$$\therefore y=2x-5$$

Persamaan garis lain yang melalui P dan tegak lurus kepada garis yang baru saja kita cari akan mempunyai kemiringan m_1 sedemikian rupa sehingga mm_1 =- -1, yaitu m_1 = - $\frac{1}{m}$.Karena m = 2, maka m_1 = - $\frac{1}{2}$.Garis ini melalui (4,3), sehingga persamaannya menjadi

$$y-3=-\frac{1}{2}(x-4)$$

$$=-x/2+2$$

$$y=-\frac{x}{2}+5$$

$$2y=10-x$$

Jika m dan m_1 menyatakan kemiringan dua buah garis yang saling tegak lurus, maka mm_1 = -1 atau $m_1 = -\frac{1}{m}$

$$2y = 4x - 5 \text{ dan } 6y = 2 - 3x$$

Jika masing-masing kita ubah ke dalam bentuk $y = mx + c$, kita peroleh

$$(i) y = 2x - \frac{5}{2} \text{ dan } (ii) y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

Jadi untuk (i) kemiringan m = 2 dan untuk garis (ii) kemiringan m_1 = -$\frac{1}{2}$. Kita lihat bahwa dalam hal ini m_1 = $-\frac{1}{m}$ atau mm_1 = -1. karena itu dapat kita simpulkan bahwa keduanya saling tegak lurus.

Di antara pasangan-pasangan garis berikut, pasangan manakah yang tegak lurus:

(i) $y = 3x - 5$ dan $3y = x + 2$

(ii) $2y = x - 5$ dan $y = 6 - x$

(iii) $y - 3x - 2 = 0$ dan $3y + x + 9 = 0$

(iv) $5y - x = 4$ dan $2y + 10x + 3 = 0$

Hasilnya :

(iii) dan (iv)

Karena jika masing-masing kita tuliskan dalam bentuk $y = mx + c$, kita peroleh

(i) $y = 3x - 5$ dan $y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$

$$m = 3; m_1 = \frac{1}{3} \therefore m.m_1 \neq -1 \text{ tidak saling tegak lurus}$$

(ii) $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$ dan $y = -x + 6$

$$m = \frac{1}{2}; m_1 = -1 \therefore m.m_1 \neq -1 \text{ tidak saling tegak lurus}$$

(iii) $y = +3x + 2$ dan $y = \frac{x}{3} - 3$

$m = 3; m_1 = -\frac{1}{3} \therefore m.m_1 = -1$ saling tegak lurus

(iv) $y = \frac{x}{5} + \frac{4}{5}$ dan $y = -5x - \frac{3}{2}$

$m = \frac{1}{5}; m_1 = -5 \therefore m.m_1 = -1$ saling tegak lurus

Setujukah anda dengan ini?

Ingatlah bahwa jika $y = mx + c$ dan $y = m_1 x + c_1$ saling tegak lurus, maka

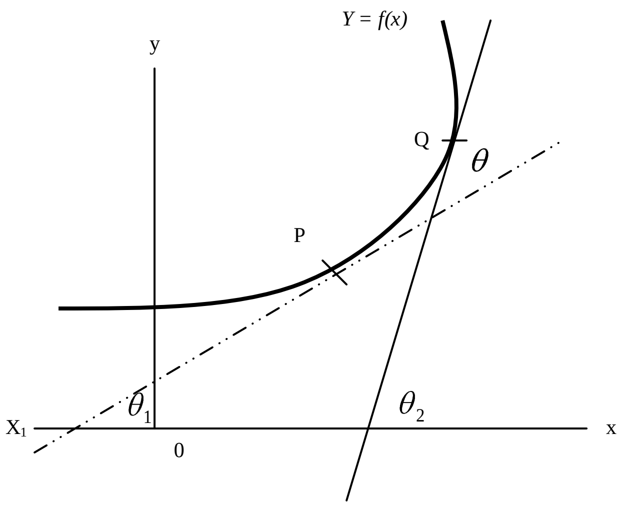
$$m.m_1 = -1, \text{ yaitu } m_1 = -\frac{1}{m}$$

Kelengkungan (curvature)

Harga $\frac{dy}{dx}$ di sembarang titik pada kurva menyatakan kemiringan (atau arah) kurva di titik tersebut. Kelengkungan (curvature) berkenaan dengan cepat atau lambat perubahan arah kurva di sekitar titik tersebut.

Dalam bingkai berikut akan kita lihat apa maksudnya semua ini.

Tinjaulah perubahan arah kurva *y = f(x)* antara titik P dan Q seperti ditunjukan pada gambar. Arah kurva diukur dengan kemiringan garis singgungya.



Kemiringan kurva di $P = \tan\theta_1 = \left\{\frac{dy}{dx}\right\}_P$

Kemirigan kurva di $Q = \tan\theta_2 = \left\{\frac{dy}{dx}\right\}_Q$

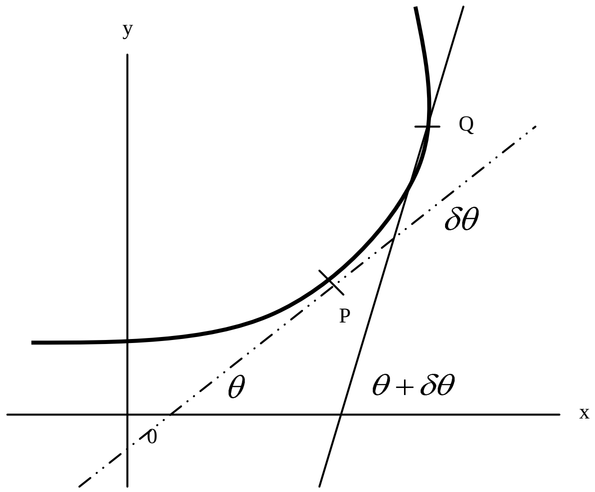
Keduanya dapat dihitung bila persamaanya diketahui.

Dari harga $\tan\theta_1$ dan $\tan\theta_2$, sudut θ_1 dan θ_2 dapat diperoleh dengan bantuan table. Dari diagram kita lilhat bahwa $\theta = \theta_2 - \theta_1$

Jika kita ingin mengetahui berapa cepat melengkungnya kurva tersebut, kita harus memperhatikan, selain perubahan arah dari P ke Q, juga panjang…………. Yang menyebabkan perubahan arah ini.

Yaitu kita harus mengetahui bukan saja perubahan arahnya, tetapi juga berapa jauh kita harus berpindah untuk memperoleh perubahan arah tersebut.

Sekarang tinjaulah dua titik, P dan Q, yang berdekatan, sehingga busur PQ cukup kecil (δs) perubahan arahnya juga tidak akan besar, sehingga jika sudut kemiringan di P adalah θ, maka sudut kemiringan di Q dapat dinyatakan dengan $\theta + \delta\theta$.

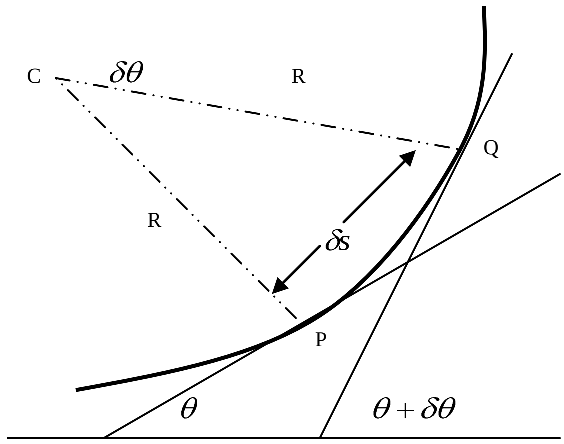


Jadi perubahan arah dari P ke Q adalah $\delta\theta$.
Panjang busur dari P ke Q adalah δs.
Rata-rata kecepatan perubahan arah dari P ke Q adalah

$$\frac{\text{Perubahan arah dari P ke Q}}{\text{Panjang busur dari P ke Q}} = \frac{\delta\theta}{\delta s}$$

Hubungan ini dapat diartikan sebagai kelengkungan rata-rata di antara P dan Q. jika sekarang kita geserkan Q mendekati P, yaitu $\delta s \to 0$, akhirnya kita peroleh $\frac{\delta\theta}{\delta S}$, yang menunjukan kelengkungan di P. besaran ini menyatakan berapa cepat berbeloknya kurva tersebut di sekitar titik P.

Dalam prakteknya, seringkali sulit memperoleh $\frac{\delta\theta}{\delta S}$ karena ini berarti bahwa kita harus memiliki hubungan antara θ dan *s*, sedangkan yang biasanya kita miliki hanyalah persamaan kurva, *y* = *f(x)*, dan koordinat titik P. karena itu kita harus mencari jalan lain untuk mendapatkannya.



misalkan garis normal di P dan Q berpotongan di titik C. karena P dan Q sangat dekat, maka $CP = QC$ (katakanlah = R) dan busur PQ dapat dipandang sebagai bagian kecil dari busur lingkaran yang berjari-jari R. perhatikan bahwa sudut PCQ = $\delta\theta$ (karena jika garis singgungnya bergeser sebesar $\delta\theta$, maka jari-jari yang tegak lulur padanya akan bergeser sebesar itu juga).

Barangkali anda masih ingat bahwa panjang busur lingkaran berjari-jari R yang membentangakan sudut sebesar θ radian dipusarnya diberikan oleh hubungan : busur = rθ.

jadi dalam diagram diatas, busur PQ = δs = ………………….

$$\boxed{\text{Busur PQ} = \delta s = R\,\delta\theta}$$

$$\delta s = R\,\delta\theta \therefore \frac{\delta\theta}{\delta s} = \frac{1}{R}$$

Jika $\delta s \to 0$, hubungan ini menjadi $\dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{1}{R}$, yaitu kelengkungan kurva di P.

Hubungan ini juga menunjukan bahwa kita dapat menyatakan kelengkungan kurva di suatu titik dengan jari-jari lingkaran R yang baru saja dan titik C disebut *pusat kelengkungan* (centre of curvature).

Telah kita lihat sekarang bahwa kita dapat memperoleh kelengkungan $\dfrac{d\theta}{ds}$ jika dengan suatu cara kita dapat mengetahui jari-jari kelengkungan R.

Contoh 1. tentukanlah jari-jari kelengkungan hiperbola xy = 4 di titik x = 2, y = 2.

$$R = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Jadi yang kita butuhkan sekarang adalah harga $\dfrac{dy}{dx}$ dan $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ di titik (2,2)

$$xy = 4 \therefore y = \frac{4}{x} = 4x^{-2} = \frac{-4}{x^2}$$

Dan $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 8x^{-3} = \dfrac{8}{x^3}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{4} = -1; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{8} = 1$$

Pada (2,2) $\quad \therefore R = \dfrac{\{1+(-1)^2\}^{\frac{3}{2}}}{1} = \dfrac{\{1+1\}^{\frac{3}{2}}}{1} = (2)^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

$$\therefore R = 2\sqrt{2} = 2{,}828\ldots satuan$$