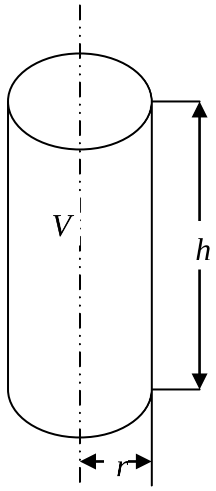
DEFERENSIAL PARSIAL
BAGIAN I

Diferensial parsial



Volume V suatu silinder berjari-jari r dengan ketinggian h dinyatakan oleh

$V = \pi r^2 h$

Yakni V bergantung kepada dua besaran, yaitu r dan h.

Jika r kita jaga tetap dan ketinggian h kita tambah, maka volume V akan bertambah. Dalam hal ini kita dapat mencari koefisien diferensial V terhadap h-tetapi hanya jika r dijaga konstan.

Yaitu $\left[\frac{dV}{dh}\right]_r$ konstan dan dituliskan sebagai $\frac{\delta V}{\delta h}$

perhatikan symbol ‘delta’ yang baru. Kita telah mengetahui arti $\frac{\delta y}{\delta x}$ dan $\frac{dy}{dx}$ sekarang kita menjumpai yang baru, $\frac{\delta V}{\delta h}$. Bentuk $\frac{\delta V}{\delta h}$ ini disebut *koefisien diferensial parsial* V terhadap h dan dalam kaitannya dengan contoh di atas tersirat pengertian bahwa harga r dijaga……………….

$\boxed{\text{konstan}}$

$V = \pi 2h$. Untuk memperoleh $\frac{\delta V}{\delta h}$, kita diferensialkan persamaan yang diberikan terhadap *h* dengan menganggap semua symbol, selain V dan *h*, konstan.

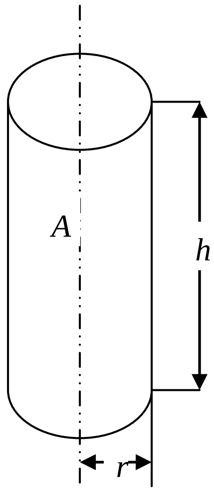
$$\therefore \frac{\delta V}{\delta h} = \pi r^2.1 = \pi r^2$$

Tentu saja kita dapat juga meninjau persoalan dengan *h* dijaga tetap perubahan *r* akan menyebabkan juga perubahan V. di sini kita menjumpai $\frac{\delta V}{\delta r}$ yang berarti bahwa sekarang kita mendiferensiasikan $V = \pi r^2 h$ terhadap *r* dengan menganggap semua symbol, selain V dan *r*, konstan.

$$\therefore \frac{\delta V}{\delta r} = \pi 2rh = 2\pi rh$$

Dalam pernyataan $V = \pi r^2 h$, V dinyatakan sebagai fungsi dari dua variable, *r* dan *h*, karena itu kita mempunyai dua koefisien diferensial parsial yaitu satu terhadap…….dan satu yang lain terhadap…..

$$\boxed{\text{Satu terhadap } r\text{; satu terhadap } h}$$



Contoh lain

Tinjaulah luas permukaan selimut silinder.

$A = 2\pi rh$

A adalah fungsi *r* terhadap *h*, sehingga kita dapat mencari $\frac{\delta A}{\delta r} = \frac{\delta A}{\delta h}$

Untuk memperoleh $\frac{\delta A}{\delta r}$, kita diferensialka fungsi A terhadap *r* dengan menganggap semua symbol yang lain konstan.

Untuk memperoleh $\frac{\delta A}{\delta h}$ kita diferensialkan fungsi A terhadap *h* dengan menganggap semua symbol yang lain konstan

Jadi jika $A = 2\pi rh$, maka $\frac{\delta A}{\delta r}$ =………dan $\frac{\delta A}{\delta h}$ =…….

$A = 2\pi$ $\boxed{\frac{\delta A}{\delta r} = 2\pi h}$ Dan $\boxed{\frac{\delta A}{hr} = 2\pi r}$

Tentu saja kita tidak harus terbatas hanya pada besaran silinder. Hal yang sama berlaku untuk sembarang fungsi degan dua variable bebas. Misalnya, sebagai contoh, tinjaulah $z = x^2 y^2$

Disini *z* merupakan fungsi dari *x* dan *y*, karena itu kita dapat mencari $\frac{\delta z}{\delta x}$ *dan* $\frac{\delta z}{\delta y}$

(i) Untuk mencari $\frac{\delta z}{\delta x}$, kita diferensiasikan *z* terhadap *x*, dengan menjaga *y* konstan. $\therefore \frac{\delta z}{\delta x} = 2xy^3 = 2xy^3$

(ii) Untuk mencari $\frac{\delta z}{\delta x}$, kita diferensiasikan *z* terhadap *y*, dengan menjaga *z* konstan $\therefore \frac{\delta z}{\delta y} = x^2 3y^2 = 3x^2 y^2$

Diferensiasi parsial tidaklah sukar! Kita menganggap setiap variable bebas sementara sebagai besaran……..; kecuali satu yang akan kita gunakan untuk mendiferensiasi.

$$\boxed{\text{konstan}}$$

Marilah kita melihat beberapa contoh lagi :
Contoh 1.
$u = x^2 + xy + y^2$

(i) Untuk memperoleh $\frac{\delta u}{\delta x}$, kita anggap *y* konstan

Diferensiasi parsial x^2 terhadap $x = 2x$

Diferensiasi parsial *xy* terhadap $x = y$ (*y* adalah factor konstan)

Diferensiasi parsial y^2 terhadap $x = 0$ (y^2 adalah suku konstan)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$$

(ii) Untuk memperoleh $\frac{\partial u}{\partial y}$, kita anggap *x* konstan

Diferensiasi parsial x^2 terhadap $y = 0$ (x^2 adalah suku konstan)

Diferensiasi parsial *xy* terhadap $y = x$ (*x* adalah factor konstan)

Diferensiasi parsial y^2 terhadap $y = 2y$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + 2y$$

Contoh 2.

$$z = x^3 + y^3 - 2x^2y$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 0 - 4xy = 3x^2 - 4xy$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3y^2 - 2x^2 = 3y^2 - 2x^2$$

Contoh 3.

$$z = (2x - y)(x + 3y)$$

Bentuk ini merupakan bentuk perkalian; aturan perkalian yang bias dapat diterapkan di sini dengan mengingat bahwa dalam mencari $\frac{\partial z}{\partial x}$, y dijaga konstan, dan dalam mencari $\frac{\partial z}{\partial y}$, x dijaga konstan.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2x - y)(1+0) + (x+3y)(2-0)$$
$$= 2x - y + 2x + 6y = 4x + 5y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2x - y)(0+3) + (x+3y)(0-1)$$
$$= 6x - 3y - x - 3y = 5x - 6y$$

Yang stu berikut untuk anda

Jika $z = (4x - 2y)(3x + 5y)$, tentukanlah $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$

Hasilnya : $\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = 24x + 14y}$ $\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = 14x - 20y}$

Karena $z = (4x - 2y)(3x + 5y)$ yakni bentuk perkalian.

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = (4x - 2y)(3+0) + (3x+5y)(4-0)$$
$$= 12x - 6y + 12x + 20y = 24x + 14y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = (4x - 2y)(0+5) + (3x+5y)(0-2)$$
$$= 20x - 10y - 6x - 10y = 14x - 20y$$

Contoh 4

Jika $z = \frac{2x - y}{x + y}$, tentukanlah $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$

Dengan menggunakan aturan pembagian, kita peroleh

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+y)(2-0)-(2x-y)(1+0)}{(x+y)^2} = \frac{3y}{(x+y)^2}$$

Dan $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x+y)(0-1)-(2x-y)(0+1)}{(x+y)^2} = \frac{-3x}{(x+y)^2}$$

Contoh 5.

Jika $z = \sin(3x + 2y)$, tentukanlah $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$

Jelas bahwa di sini kita berhadapan dengan ‘fungsi dari fungsi’, karena itu terapkan cara yang biasa dengan mengingat bahwa untuk mencari

(i) $\frac{\partial z}{\partial x}$, kita perlakukan y sebagai besaran konstan, dan

(ii) $\frac{\partial z}{\partial y}$, kira perlakukan x sebagai besaran konstan.

Inilah penyelesaiannya :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(3x + 2y).\frac{\partial}{\partial x}(3x + 2y)$$
$$= \cos(3x + 2y).3 = 3\cos(3x + 2y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(3x + 2y).\frac{\partial}{\partial x}(3x + 2y)$$
$$= \cos(3x + 2y).2 = 2\cos(3x + 2y)$$

Demikian hasilnya. Jadi kita lihat bhwa dalam mencari diferensiasi parsial kita boleh menggunakan semua aturan diferensiasi biasa, dengan tambahan bagwa semua variable, selain daripada yang sedang kita tinjau, sementara dianggap…….

Pertambahan kecil

Misalkan kita kembali ke volume silinder pada awal program; sekali lagi kita tuliskan

$V = \pi r^2 h$. Telah kita lihat bhwa kita dapat mencari $\frac{\partial V}{\partial r}$ dengan *h* konstan, dan $\frac{\partial V}{\partial h}$ *dengan r* konstan.

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi rh; \frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

Sekarang kita lihat apa yang akan kita peroleh bila *r* dan *h* diubah bersama-sama.

Jika *r* diubah menjadi $r + \partial r$, dan *h* menjadi $h + \partial h$, maka V akan berubah menjadi $V + \partial V$. Volume yang baru ini diberikan oleh

$$V + \partial V = \pi(r + \partial r)^2 (h + \partial h)$$
$$= \pi\left(r^2 + +2r.\partial r + \partial r^2\right)(h + \partial h)$$
$$= \pi\left(r^2 h + +2rh.\partial r + h\partial r^2 + r^2\partial h + 2r\partial r\partial h + \partial r^2 + \partial h\right)$$

Kurangi kedua ruas dengan $V = \pi r^2 h$, maka diperoleh

$$\partial V = \pi\left(2rh.\partial r + h.\partial r^2 + r^2\partial h + 2r\partial r\partial h + \partial r^2.\partial h\right)$$
$$= \pi\left(2rh\partial r + \partial h.r^2\right)$$

Karena ∂r dan ∂h kecil dan semua suku yang memiliki derajat kekecilan yang lebih tinggi.

$$\partial V == \pi\left(2rh\partial r + \partial h.r^2\right)$$
$$\partial V = \frac{\partial V}{\partial r}\partial r + \frac{\partial V}{\partial h}\partial h$$

Mari kita hitung sebuah contoh numeric untuk melihat bagaimana penggunaan hal ini.

Contoh

Sebuah silinder memiliki ukuran *r* = 5 cm, *h* = 10 cm. tentukanlah harga pendekatan pertambahan volumenya jika *r* bertambah dengan 0,2 cm dan *h* berkurang dengan 0,1 cm.

Kita ketahui, $V = \pi r^2 h$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

Dalam hal ini, r = 5 cm, h = 10 cm, sehingga

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi 5.10 = 100\pi$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2 = \pi 5^2 = 25\pi$$

$\partial r = 0{,}2$ dan $\partial h = -0{,}1$ (minus karena h berkurang)

$$\therefore \partial V = \frac{\partial V}{\partial r}.\partial r + \frac{\partial V}{\partial h}.\partial h$$

$$= 20\pi - 2{,}5\pi = 17{,}5\pi$$

$$\therefore \partial V = 54{,}96 cm^3$$

Yakni volumenya bertambah dengan 54,96 sentimeter kubik. Nah, demikianlah!

Hasil seperti ini berlaku bukan hanya untuk volume silinder saja, tetapi juga untuk sembarang fungsi dengan dua variable bebas.

Contoh. Misalkan z adalah fungsi x dan y, yakni $z=f(x,y)$; jika x dan y bertambah sedikit dengan ∂x dan ∂y, maka pertambahan ∂z akan relative kecil juga.

Jika kita jabarkan ∂z dalam deret pangkat ∂x dan ∂y yang berpangkat lebih tinggi, dengan A dan B adalah fungsi x dan y.

Jika y dijaga tetap, maka $\partial y = 0$, sehingga

$\partial z = A\partial x +$ suku-suku $\therefore \partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y$ yang berpangkat lebih tinggi

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = A$, dan jika $\partial x \to 0$, hubungan ini menjadi $A = \frac{\partial z}{\partial x}$

Serupa dengan itu, jika x konstan, dengan membuat $\partial y \to 0$, kita peroleh $B = \frac{\partial z}{\partial y}$

$\therefore \partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y +$ besaran-besaran kecil berpangkat tinggi yang dapat diabaikan

$$\therefore \partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y$$

Jadi jika $z = f(x, y)$

$$\therefore \partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y$$

Ini adalah kunci untuk semua penerapan selanjutnya dan hasil ini akan kita kutip berulang-ulang.

Hasil ini berlaku umum dan hasil yang serupa berlaku juga untuk fungsi dengan tiga variable bebas, yaitu :

Jika $z = f(x, y, w)$

Maka $\therefore \partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y + \frac{\partial z}{\partial w}\partial w$

Jika kita ingat aturan yang berlaku untuk fungsi dengan dua variable bebas, tidak sulit bagi kita untuk memperluasnya bilamana diperlukan.

Karena itu kita tuliskan sekali lagi:

$z = f(x, y)$ maka $\therefore \partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y$

Contoh 1. jika $I = \frac{V}{R}$, dengan V = 250 volt dan R = 50 ohm, tentukanlah perubahan I jika V bertambah sebesar 1 volt dan R bertambah sebesar 0,5 ohm.

$I = f(V, R) \therefore \partial I = \frac{\partial I}{\partial V}\partial V + \frac{\partial I}{\partial R}\partial R$

$\frac{\partial I}{\partial V} = \frac{I}{R}\, dan \frac{\partial I}{\partial R} = -\frac{V}{R^2}$

$\therefore \partial I = \frac{I}{R}\partial V - \frac{V}{R^2}\partial R$

Sehingga untuk R = 50, V = 250, $\partial V = 1, dan \partial R = 0{,}5$

$\partial I = \frac{1}{50}(1) - \frac{250}{2500}(0{,}5)$

$= \frac{1}{50} - \frac{1}{20}$

$= 0{,}02 - 0{,}05 = -0{,}03$

Yakni I turun sebesar 0,03 ampere

Inilah sebuah contoh lain

Contoh 2. jika $y = \frac{ws^3}{d^4}$, tentukanlah persentasi pertambahan *y*, jika *w* bertambah 2 persen, *s* berkurang 3 persen, dan *d* bertambah 1 persen

Perhatikan bahwa dalam hal ini *y* merupakan fungsi dengan tiga variable, w, s, dan d, sehingga rumus yang berlaku untuknya adalah

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial w}\partial w + \frac{\partial y}{\partial s}\partial s + \frac{\partial y}{\partial d}\partial d$$

Kita dapatkan bahwa $\frac{\partial y}{\partial w} = \frac{s^3}{d^4}; \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{3ws^2}{d^4}; \frac{\partial y}{\partial d} = \frac{4ws^3}{d^5}$

$$\partial y = \frac{s^3}{d^4}\partial w + \frac{3ws^2}{d^4}\partial s + \frac{-4ws^3}{d^5}\partial d$$

Nah, sekarang berapakah harga $\partial w, \partial s, \partial d$?

Benarkah bila kita katakana $\partial w = \frac{2}{100}; \partial s = \frac{-3}{100}; \partial d = \frac{1}{100}$?