DIFERENSIASI

Koefisien diferensial baku

Table berikut memuat daftar diterensial baku yang pasti pernah anda gunakan beberapa kali sebelum ini.

$y = f(x)$	$\frac{dy}{dx}$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{kx}	ke^{kx}
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x.\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec}^2 x.\cot x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

Bukti untuk dua fungsi yang terakhir diberikan dalam bingkai 2, lanjutkanlah.

Koefisien diferensial utuk sinh x dan cosh x dapat diperoleh dengan mudah dengan mengingat definisi eksponensialnya, dan juga dengan mengingat bahwa

$$\frac{d}{dx}\left\{e^x\right\} = e^x \text{ dan } \frac{d}{dx}\left\{e^{-x}\right\} = -e^{-x}$$

(i) $y = \sinh x$ $\qquad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

(ii) $y = \cosh x$ $\qquad y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

Perhatikan bahwa tidak ada tanda minus seperti halnya dalam diferensiasi fungsi trigonometric cos x.

Koefisien diteferensial untuk tanh x akan kita turunkan nanti.

Untuk melihat apakah anda benar^2 telah memahami koefisien diferensial dasar tersebut, tutplah daftar yang baru saja anda salin dan tuliskanlah koefisien deferesial fungsi berikut. Semuanya sangat mudah

1. x^5
2. sin x
3. e^{3x}
4. ln x
5. tan x
6. 2^x
7. sec x
8. cosh x
9. $\log_{10}$ x
10. e^x
11. cos x
12. sinh x
13. cosec x
14. a^3
15. cot x
16. a^x
17. x^{-x}
18. $\log_a x$
19. $\sqrt{x}$
20. $e^{x/2}$

Inilah hasilnya. Periksalah pekerjaan anda dengan seksama dan berilah khusus untuk jawaban yang salah.

1. $5x^4$
2. cos x
3. $3e^{3x}$
4. 1/x
5. $\sec^2 x$
6. $2^x \ln 2$
7. sec x. tan x
8. sinh x
9. 1/(x ln 10)
10. e^x
11. –sin x
12. cosh x
13. –cosec x. cot x
14. 0
15. $-\text{cosec}^2 x$
16. a^x ln a
17. $-4\ x^{-5}$
18. 1/(x ln a)
19. $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1/(2\sqrt{x})$
20. $1/2e^{x/2}$

Bila jawaban anda tidak semua betul, sebaiknya lihatlah kembali bingkai 1, atau daftar yang baru saja anda salin. Dan bilamana perlu pelajarilah kembali. Daftar ini akan menjadi alat untuk pembahasan kita selanjutnya.

Fungsi dari suatu fungsi

Sin x adalah fungsi x karena harga sin x bergantung kepada harga sudut x. demikian pula, sin (2x + 5) adalah fungsi sudut (2x+5)

Yaitu sin (2x + 5) adalah fungsi dari (2x + 5)

Tetapi (2x + 5) itu sendiri merupakan fungsi x, karena harganya bergantung kepada x.

Yaitu (2x + 5) adalah fungsi dari x

Jika kedua pernyataan itu kita gabungkan, dapta kita lakukan bahwa

sin (2x + 5) adalah fungsi dari (2x + 5)

sin (2x + 5) adalah fungsi dari fungsi x

Jadi sin (2x + 5) adalah fungsi dari fungsi x dan secara umum ungkapan itu sering dikatakan sebagai fungsi dari suatu fungsi.

Dengan demikian, $e^{\sin y}$ adalah fungsi dari fungsi …………

Karena $e^{\sin y}$ bergantung kepada harga pangkat sin y dan siny bergantung kepada y. jadi $e^{\sin y}$ adalah fungsi dari fungsi y.

Seringkali kita membutuhkan koefisien diferensial fungsi dari fungsi seperti demikian. Kita dapat memperolehnya dengan menggunakan prinsip pertama:

Contoh 1. diferensialkanlah y = cos (5x-4) terhadap x.

Misalkan u = (5x-4) $\therefore y = \cos u \therefore \frac{dy}{du} = -\sin u = -\sin(5x-4)$.

Tetapi ini adalah $\frac{dy}{du}$ bukan $\frac{dy}{dx}$. Untuk mengubahnya menjadi koefisien yang kita kehendaki, kita gunakan hubungan $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$, yaitu untuk memperoleh $\frac{dy}{dx}$ (yang kita cari), kita kalikan $\frac{dy}{du}$(yang kita dapatkan) dengan $\frac{dy}{du}$; $\frac{du}{dx}$ diperoleh dari hubungan substitusi u = (5x-4), yaitu $\frac{du}{dx} = 5$

$\therefore \frac{d}{dx}\{\cos(5x-4)\} = -\sin(5x-4)$ x -5 sin (5x-4)

Sekarang cobalah anda cari koefisien diferensial dari $y = e^{\sin x}$ dengan menggunakan prinsip pertama.(Seperti tadi,misalkanlah) u = sin x).

$\boxed{\frac{d}{dx}\{e^{\sin x}\} = \cos x.e^{\sin x}}$

Karena: $y = e^{\sin x}$. Misalkan u = sin x $\therefore y = e^u \therefore \frac{dy}{du} = e^u$

Tetapi $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ dan $\frac{du}{dx}$ = cos x

$\therefore \frac{d}{dx}\{e^{\sin x}\} = e^{e\sin x}.\cos x$

Cara ini berlaku umum.

Jika *y* = *f(u)* dan *u* dan *u* = f(x),maka $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$.Jadi jika *y* = ln *F*.

Dengan *F* adalah fungsi x,maka

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dF}.\frac{dF}{dx} = \frac{1}{F}.\ \frac{dF}{dx}$$

Sehingga untuk *y = ln sin x*. $\frac{dy}{dx}= \ \frac{1}{\sin x}$.cos x = cot x

Hal ini sangat penting,jangan lupa factor $\frac{dF}{dx}$, karena itu hati – hatilah!

Pembagian

Dalam hal ini pembagian, jika *u* dan *v* adalah fungsi x,dan *y* = $\frac{u}{v}$

Maka $$\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Contoh 1. Jika $y = \frac{\sin 3x}{x+1}$, $\frac{dy}{dx} = \ \frac{(x+1)3\cos 3x-\sin 3x.1}{(x+1)^2}$

Jika anda telah dapat mendiferensiasikan masing – masing fungsinya,selanjutnya tidaklah sulit.

Cobalah yang berikut ini.Jika $y = \frac{\cos 2x}{x^2}$, $\frac{dy}{dx}$ =……………………

$$\boxed{\frac{d}{dx}\{\frac{\cos 2x}{x^2}\}=\frac{-2(x\sin 2x+\cos 2x)}{x^3}}$$

Karena $\frac{d}{dx}\{\frac{\cos 2x}{x^2}\} = \frac{x(-2\sin 2x)-\cos 2x.2x}{x^4}$

$$= \frac{-2x(x\sin 2x+\cos 2x)}{x^4}$$

$$= \frac{-2(x\sin 2x+\cos 2x)}{x^3}$$

Jadi: Untuk *y* = *uv*, $\frac{dy}{dx} = u\ \frac{dv}{dx}+v\ \frac{du}{dx}$ ……………..(i)

Untuk $y = \frac{u}{v}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ ………………(ii)

Perhatikanlah sampai anda yakin bahwa anda telah memahaminya.

Anda dapat membuktikan koefisien diferensial dari tan x dengan cara pembagian ini,Karena y = tan x berarti juga y = $\frac{\sin x}{\cos x}$.

Dengan menggunakan kaidah pembagian, $\frac{dy}{dx}=$ ………..(kerjakanlah secara terperinci).

Diferensial Logaritmik

Kaidah untuk mendiferensiasikan perkalian atau pembagian yang baru saja kita bahas mudah dipakai untuk fungsi dua-faktor saja,yaitu $u\ v$ atau $\frac{u}{v}$.

Jika ada lebih dari dua fungsi dengan berbagai susunan atas atau bawah,koefisien diferensial lebih baik dicari melalui apa yang kita kenal sebagai 'diferensial logaritmik'.

Semuanya didasarkan atas kenyataan bahwa $\frac{d}{dx}\{\ln x\} = \frac{1}{x}$ dan bila z digantikan dengan satu fungsi *F*, maka $\frac{d}{dx}\{\ln F\} = \frac{1}{F}.\frac{dF}{dx}$. Dengan mengingat hal ini,marilah kita tinjau sebuah kasus $y - \frac{uv}{w'}$ dengan *u*,*v*, dan *w* – jadi juga *y* – adlah fungsi x.

Pertama-tama kita ambil logaritmanya dengan bilangan dasar e.

$$\text{Ln}\, y = u + \ln v - \ln w$$

Kemudian diferensialkanlah masing-masing ruas terhadap x,dengan mengingat bahwa *u, v, w* dan *y* semuanya adalah fungsi x.Hasil apakah yang kita peroleh?

$$\boxed{\frac{1}{x}.\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}.\frac{dv}{dx} - \frac{1}{w}.\frac{dw}{dx}}$$

Untuk memperoleh $\frac{dy}{dx}$-nya saja, kita tinggal mengalikan seluruh hasil diatas dengan *y*.Perhatikan bahwa dalam melakukan ini, kita gunakan fungsi besar keseluruhan yang menyatakan *y*.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{uv}{w}\{\frac{1}{u}.\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}.\frac{dv}{dx} - \frac{1}{w}.\frac{dw}{dx}\}$$

Bentuk ini bukanlah suatu rumus yang harus dihafalkan,tetapi *langkah* pengerjaannyalah yang harus diingat,karena suku-suku ruas kanan yang sesungguhnya belum tentu demikian,bergantung pada fungsi awal yang kita miliki.

Baiklah kita lihat sebuah contoh agar lebih jelas.

Jika $y = \frac{x^2 \sin x}{\cos 2x}$, tentukanlah $\frac{dy}{dx}$

Langkah pertama untuk proses ini adalah ………..

Mengambil logaritma kedua ruasnya

$$Y = \frac{x^2 \sin x}{\cos 2x} \qquad \therefore \ln y = \ln(x^2) + \ln(\sin x) - \ln(\cos 2x)$$

Sekarang diferensiasikan kedua ruasnya terhadap x, dengan mengingat bahwa $\frac{d}{dx}(\ln F)\ \frac{1}{F}.\frac{dF}{dx}$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}.2x + \frac{1}{\sin x}.\cos x - \frac{1}{\cos 2x}.(-2\sin 2x)$$

$$= \frac{2}{x} + \cot x + 2\tan 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \sin x}{\cos 2x}\{\frac{2}{x} + \cot x + 2\tan 2x\}$$

Hasil ini sangat rumit,tetapi fungsi asalnya memang rumit juga!

Fungsi implisit

Jika $y = x^2 - 4x + 2$, y terdifinisi sepenuhnya oleh x dan y disebut sebagai *fungsi eksplisit dari x.*

Jika kaitan antara x dan y sangat ketat,ada kalanya kita tidak dapat (atau tidak perlu) memisahkan y di ruas kiri sendiri,misalnya $xy + \sin y = 2$.Dalam hal semacam ini,y disebut *fungsi implisit dari x*,karena hubungan dalam bentuk y = f(x) tersirat di dalamnya.

Meskipun demikian,seringkali kita butuhkan koefisien diferensial y terhadap x,dan pada kenyataannya hal ini tidaklah sulit untuk dicari.Yang perlu kita ingat hanyalah bahwa y adalah fungsi x,sekalipun barang kali kita tidak dapat melihat hubungan eksplisitnya.Sebetulnya, hal ini tidak lain dari pada perluasan cara'fungsi dari suatu fungsi yang biasa.$x^2 + y^2 = 25$,dalam bentuk ini,adalah salah satu contoh dari fungsi…………

$x^2 + y^2 = 25$ adalah contoh dari fungsi **implisit.**

Sekali lagi,yang perlu kita ingat hanyalah bahwa y adalah fungsi x.

Marilah kita coba mencari $\frac{dy}{dx}$ jika $x^2 + y^2 = 25$.

Jika bentuk ini kita diferensiasikan terhadap x,maka kita peroleh

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Perhatikan, bahwa kita mendiferensiasikan y^2 seperti mendiferensiasikan kuadrat suatu fungsi,yang memberikan 'dua kali fungsi tersebut dikalikan dengan koefisien diferensial fungsi yang bersangkutan.'Selanjutnya mudah,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore y\frac{dy}{dx} = -x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Seperti anda lihat,koefisien – diferensial suatu fungsi implisit mungkin saja (dan biasanya memang) memuat baik x maupun ………………….

Sekarang marilah kita lihat satu atau dua contoh penggunaannya.

Contoh 1. *Jika* $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$, tentukan $\frac{dy}{dx}$ dan

Di titik x = 3,y = 2.

Diferensialkanlah bentuk tersebut terhadap x.

$$2x + 2y\,\frac{dy}{dx} - 2 - 6\,\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore (2y - 6)\,\frac{dy}{dx} = 2 - 2x$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{2y-6} = \frac{1-x}{y-3}$$

$$\therefore \text{di } (3,2) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1-3}{2-3} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Demikian pula $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1-x}{y-3}\right\} = \dfrac{(y-3)(-1) - (1-x)\dfrac{dy}{dx}}{(y-3)^2}$

$$= \frac{(3-y) - (1-x)\dfrac{dy}{dx}}{(y-3)^2}$$

Di (3,2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{(3-2) - (1-3)2}{(2-3)^2} = \dfrac{1-(-4)}{1} = 5$

$$\therefore \text{di } (3,2)\ \frac{dy}{dx} = 2,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 5$$

Yang lain lagi. Jika $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$, tentukanlah $\dfrac{dy}{dx}$

Kerjakanlah, tetapi hati-hati dengan suku perkalilannya. Jika tiba giliran 2xy, perlakukanlah ia sebagai (2x) (y).

$$x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$$

$$2x + 2x\frac{dy}{dx} + 2y + 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore (2x + 6y)\frac{dy}{dx} = -(2x + 2y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{(2x+2y)}{(2x+6y)} = -\frac{(x+y)}{(x+3y)}$$

Persamaan Parametrik

Dalam beberapa persoalan, seringkali lebih enak mengungkapkan suatu fungsi dengan menyatakan x dan y dalam suatu variable bebas ketiga secara terpisah, misalnya sebagai contoh $y = \cos 2t, x = \sin t$. dalam hal ini, sebuah harga *t* tertentu akan memberikan pasangan harga *x* dan *y*, yang jika perlu dapat saja digambarkan dalam grafik sebagai salah satu titik dari kurva $y = f(x)$.

Variable yang ketiga ini, misalnya *t*, disebut *parameter*, dan kedua pernyataan untuk *x* dan *y* disebut *persamaan parametric*. Ada kalanya kita masih memerlukan koefisien diterensial fungsi tersebut terhadap *x*, bagaimanakah kita dapat memperolehnya?

Baiklah kita ambil contoh yang diberikan di atas. Persamaan parametric untuk fungsinya adalah $y = \cos 2t, x = \sin t.$ kita ingin mencari pernyataan untuk $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$y = \cos 2t, x = \sin t.$ tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Dari $y = \cos 2t.$ dapat kita peroleh $\frac{dy}{dt} = -2\sin 2t$

Dari $x = \sin t.$ dapat kita peroleh $\frac{dx}{dt} = \cos t$

Sekarang kita gunakan kenyataan bahwa $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -2\sin 2t.\frac{1}{\cos t}$$

Sehingga
$$= -4\sin t\cos t.\frac{1}{\cos t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -4\sin t$$

Hal ini masih cukup mudah. Selanjutnya bagaimanakah kita dapat memperoleh koefisien diferensial keduanya? Kita *tidak dapat* memperolehnya dengan cara mencari dahulu $\frac{d^2y}{dt^2}$ dan $\frac{d^2x}{dt^2}$ dari persamaan parametric dan kemudain menggabungkan keduanya seperti ketika kita mencari koefisien diferensial pertama. Cara ini hanya akan menghasilkan sesuatu yang berbentuk $\frac{d^2y}{dx^2}$ yang entah apa artinya, dan tentu saja bukan ini yang kita cari. Jadi apa yang harus kita lakukan?

Untuk memperoleh koefisien diferensial kedua, kita harus kembali kepada arti semula dari $\frac{d^2y}{dx^2}$,

$$i.e. \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(-4\sin t)$$

Tetapi kita tidak dapat langsung mendiferensiasikan fungsi t terhadap x, karena itu

$$\frac{d}{dx}(-4\sin t) = \frac{d}{dt}(-4\sin t).\frac{dt}{dx}$$

kita gunakan $\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -4\cos t.\frac{1}{\cos t} = -4$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -4$$

Marilah kita lihat contoh lain. Bagaimana dengan contoh berikut?

Persamaan parametric suatu fungsi diberikan sebagai

$y = 3\sin\Phi - \sin^3\Phi, x = \cos^3\Phi$

Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$

$y = 3\sin\Phi - \sin^3\Phi \therefore \frac{dy}{d\Phi} = 3\cos\Phi - 3\sin^2\Phi\cos\Phi$

$x = \cos^3\Phi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \therefore \frac{dx}{d\Phi} = 3\cos^2\Phi(-\sin\Phi)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -3\cos^2\Phi\sin\Phi$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\Phi}.\frac{d\Phi}{dx} = 3\cos\Phi(1-\sin^2\Phi).\frac{1}{-3\cos^2\Phi\sin\Phi}$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. = \frac{3\cos^3\Phi}{-3\cos^2\Phi\sin\Phi} \ldots.\therefore \frac{dy}{dx} = -\cot\Phi$

Juga $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-\cot\Phi) = \frac{d}{d\Phi}(-\cot\Phi)\frac{d\Phi}{dx}$

$= -(-\cos ec^2\Phi)\frac{1}{-3\cos^2\Phi\sin\Phi}$

$\because \frac{d^{2y}}{dx^2} = \frac{-1}{3\cos^2\Phi\sin^3\Phi}$

Yang satu berikut ini untuk anda kerjakan dengan jalan yang sama

Jika $x = \frac{2-3t}{1+t}, y = \frac{2+3t}{1+t}$, tentukan $\frac{dy}{dx}$

Karena $\quad x = \frac{2-3t}{1+t} \therefore \frac{dx}{dt} = \frac{(1+t)(-3)-(2-3t)}{(1-t)^2}$

$y = \frac{3+2t}{1+t} \therefore \frac{dy}{dt} = \frac{(1+t)(2)-(3+2t)}{(1-t)^2}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{-3-3t-2+3t}{(1+t)^2} = \frac{-5}{(1+t)^2}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{2+2t-3-2t}{(1+t)^2} = \frac{-1}{(1+t)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{(1+t)^2}\frac{(1+t)^2}{-5} = \frac{1}{5} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}$

Satu soal lagi untuk anda sebagai penutup bagian ini. Cara penyelesaiannya masih sama seperti lainnya.

Jika $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$ dan $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$

Inilah penyelesaianya, dimulai sama seperti contoh sebelumnya.

$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$

$\therefore \dfrac{dx}{d\theta} = a(-\sin\theta + \theta\cos\theta) = a\theta\cos\theta$

$y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

$\therefore \dfrac{dy}{d\theta} = a(\cos\theta + \theta\sin\theta - \cos\theta) = a\theta\sin\theta$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{d\theta}.\dfrac{d\theta}{dx} = a\theta\sin\theta.\dfrac{1}{a\theta\cos\theta} = \tan\theta$

$\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{dy}{dx} = \tan\theta$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(\tan\theta) = \dfrac{d}{d\theta(\tan\theta)}.\dfrac{d\theta}{dx}$

$\ldots\ldots\ldots\ldots = \sec^2\theta.\dfrac{1}{a\theta\cos\theta}$

$\ldots\ldots\ldots\ldots \therefore \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{a\theta\cos^3\theta}$

Anda telah sampai kepada akhir program diferensial ini, sebagian besar hanya merupakan ulangan dari apa yang pernah anda peroleh. Penutup ini membawa anda kepada Latihan Ujian Akhir, pindahkan ke sana dan kerjakanlah ujian tersebut dengan teliti.