PENERAPAN DIFERENSIASI
BAGIAN 2

Invers fungsi trigonometris

Telah kita ketahui bahwa symbol $\sin^{-1} x$ (kadang-kadang disebutkan juga sebagai '$\arcsin x$') menyatakan 'sudut yang sinusnya memberikan harga x', sebagai contoh

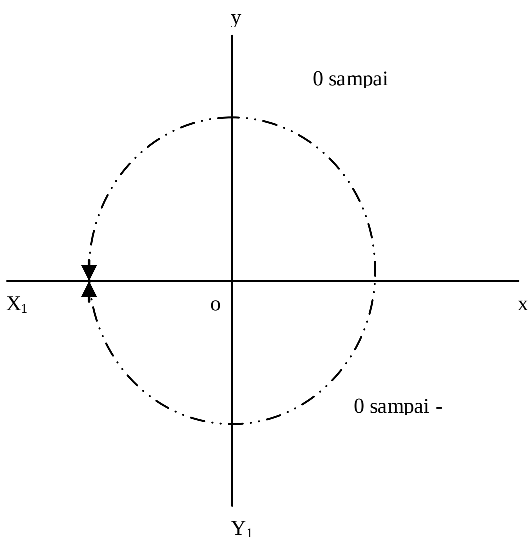
$\sin^{-1} 0{,}5 =$ sudut yang harga sinusnya 0,5

$= 30^0$

Tentu saja, banyak sudut yang harga sinusnya 0,5, misalnya : 30^o, 150^o, 390^0, 510^o, 750^o, 870^o……….dan seterusnya, karena itu benarkah bila dituliskan $\sin^{-1} 0{,}5$ adalah salah satu (atau semua) sudut yang mungkin tersebut?

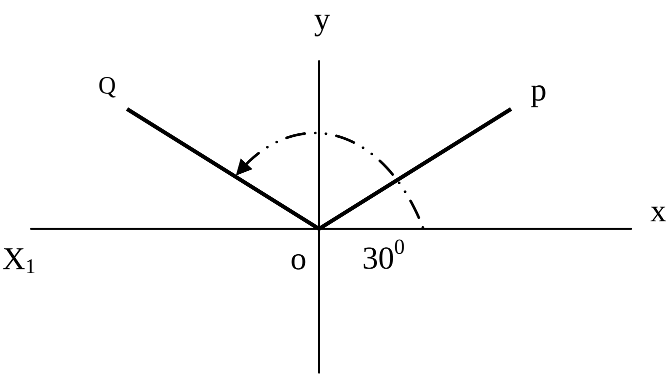
Jawabnya adalah tidak, dengan alas an definisi $\sin^{-1} x$ yang diberikan diatas masih kurang ketat. Seharusnya kita katakana bahwa $\sin^{-1} x$ menyatakan harga *utama* (principal) sudut yang sinusnya sama dengan x ; untuk jelasnya apa yang dimaksud dengan pernyataan ini, pindahkanlah ke bingkai 2.

Harga utama $\sin^{-1} 0{,}5$ adalah sudut yang secara numeric paling kecil (diukur diantara 0^o dan 180^o, atau diantara 0^0 dan -180^o), yang harga sinusnya sama dengan 0,5. perhatikan bahwa dalam hal ini sudut kita ukur dari 0^o sampai 180^o, atau dari 0^o sampai -180^o.



Dalam daerah ini ada 2 sudut yang sinusnya 0,5, yaitu 30^o dan 150^o. harga utamanya adalah sudut yang paling dekat dengan arah OX positif yaitu 30^o.

$\sin^{-1} 0{,}5 = 30^o$

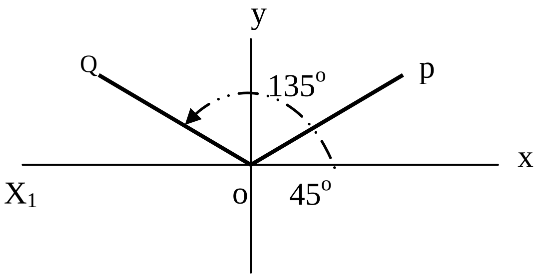


Hanya ini , tidak ada sudut lain!

Serupa dengan itu, jika $\sin\theta = 0{,}7071,$ berapakah harga utama sudut θ?

Harga utama $\theta = 45^o$

Karena : $\sin\theta = 0{,}7071 \therefore$ dalam daerah diantara 0^o sampai 180^o, atau 0^o sampai -180^o, sudut yang mungkin adalah 45^o dan 135^o.



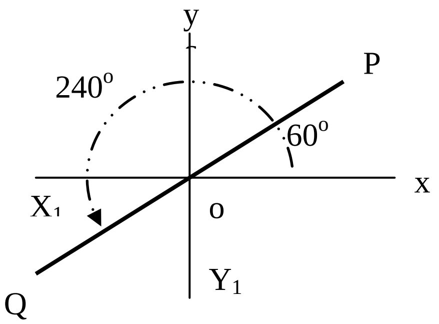
Harga utamanya adalah sudut yang paling dekat ke sumbu OX positif, yaitu 45^o.

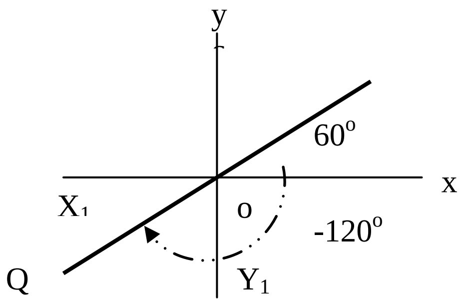
$\sin^{-1} 0{,}7071 = 45^o$

Dengan cara yang sama dapat kita tentukan harga $\tan^{-1}\sqrt{3}$

Jika $\tan\theta\sqrt{3} = 1{,}7321$, maka $\theta = 60^o$ atau 240^o. bila dituliskan dalam daerah dari 0^o sampai 180^o atau dari 0^o sampai -180^o, sudut ini menjadi $\theta = 60^o$ atau -120^o

Harga utama sudutnya adalah yang paling dekat kearah OX positif, yaitu dalam



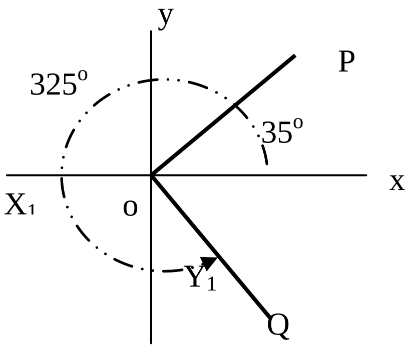


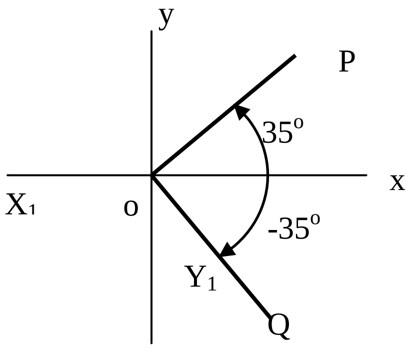
hal ini, $\tan^{-1}\sqrt{3} =$ ……….

$\tan^{-1}\sqrt{3} = 60^o$

Sekarang marilah kita tinjau harga $\cos^{-1} 0{,}8192$

Dari table cosinus, kita peroleh sebuah sudut yang harga cosinusnya adalah 0,8192 yaitu 35^o-25^o, yaitu 325^o (atau – 35^o)

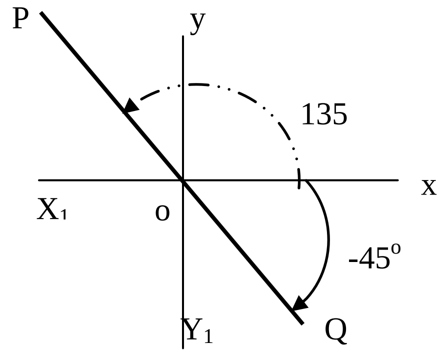




Keduanya terletak simetris, karena itu tentu saja tidak ada yang lebih dekat pada OX. Dalam keadaan seperti ini, kita terima perjanjian bahwa harga utamanya dipilih sudut yang positif, yaitu 35^o, $\therefore \cos^{-1} 0{,}8192 = 35^0$.

$$\boxed{\tan^{-1}(-1) = -5}$$

Karena,jika tan θ= -1, θ=135^0



Dalam daerah dari 0^0 sampai 180^0,harga sudut tersebut adalah 135^0 dan – 45^0.Yang lebih dekat kesumbu OX adalah – 45^0. $\therefore$ Harga utamanya = - 45^0. harga utamanya = -45^0.

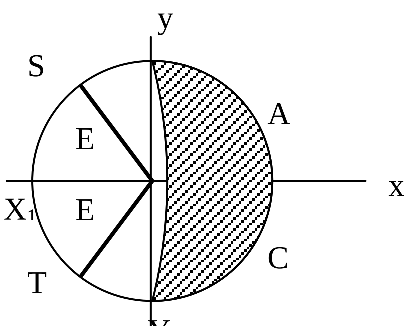
$\underline{\tan^{-1}(-1) = -45^0}$

Satu soal lagi :

Hitunglah cos^{-1} (-0,866)

Karena kita ketahui:

$$\boxed{\cos^{-1}(-0{,}866) = 150^o}$$

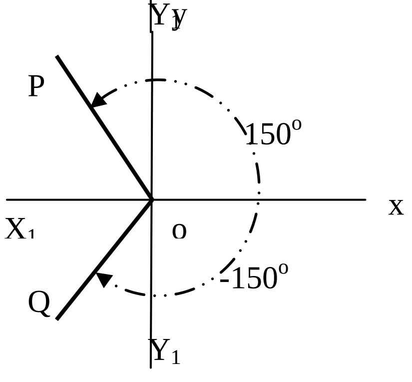


$\cos E = 0{,}866 \therefore E = 30^o$

$\therefore \theta = 150^o \, atau 210^o$

Dalam daerah di antara 0^o $\pm$ 180^0, sudut ini menjadi $\theta = 150^o$ dan -150^0. tidak ada yang lebih dekat ke sumbu OX positif. Karena itu harga utamanya diambil yang 150^o.

$\cos^{-1}(-0{,}866) = 150^o$



Sebagai rangkuman,invers fungsi trigonometris,sin^{-1} x,cos^{-1} x,tan^{-1} x menyatakan *h*……………… *v* ………………… sudut yang memberikan perbandingan trigonometris seperti yang diberikan.

Harga utama

Diferensiasi invers fungsi trigonometris

$\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ tentu saja bergantung pada harga x yang diberikan.Dengan demikian ketiganya merupakan fungsi x dan mungkin pada suatu saat kita harus mencari koefisien diferensialnya.Karena itu marilah kita coba mendapatkannya satu demi satu.

(i) Misalkan $y = \sin^{-1} x$.Kita harus mencari $\frac{dy}{dx}$

Pertama-tama,kita tuliskan dahulu bentuk invers ini menjadi bentuk langsung.

$$Y = \sin^{-x} \therefore x = \sin y$$

Sekarang diferensiasiasikan bentuk langsung ini terhadap y untuk memperoleh $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \cos y \quad \therefore \frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos}}$$

Selanjutnya kita nyatakan cos y dalam x :

Kita ketahui bahwa $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$

$$\therefore \cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$$

$$\therefore \cos y = \sqrt{(1 - x^2)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$$

$$\frac{d}{dx}\{\sin^{-1} x\} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$$

Dengan cara yang sama anda dapat menentukan $\frac{d}{dx} = \{\cos^{-1} x$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\{\cos^{-1} x\} = \frac{-1}{\sqrt{(1 - x}}}$$

Inilah penjelasanya:

Misalkan

$$y = \cos^{-1} x \therefore x = \cos y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} - \sin y \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y}$$

$$\cos^2 y = \sin^2 y = 1 \therefore \sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{(1 - x^2)}} \therefore \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{-1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$$

Kita peroleh dua hasil yang mirip

(i) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$

Sekarang coba cari koefisien diferensial untuk $\tan^{-1}$x.Pengerjaannya sedikit berbeda,tetapi metode umumnya masih sama.Cobalah dahulu untuk melihat apa yang anda peroleh,kemudian pindahkan ke bingkai 10,di situ diberikan penyelesaiannya secara terinci.

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$y = \tan^{-1} x \therefore x = \tan y$$

Pengerjaannya misalkan: $\frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$

$$\frac{dx}{dy} = 1 + x^2 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Baiklah kita kumpulkan kembali ketiga hasil yang telah kita peroleh:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{-1}{\sqrt{(1 - x^2)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1 + x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$$

Salinlah hasil ini kedalam buku catatan anda.Anda perlu mengingat hasil ini dengan baik.

Tentu saja koefisien diferensial ini dapat muncul dalam berbagai macam gabungan seperti biasa,misalnya perkalian, pembagian, dan seterusnya.

Contoh 1.Carilah $\frac{dy}{dx}$,jika diberikan bahwa y=(1 - x^2) $\sin^{-1}$ x di sini kita jumpai suatu perkalian

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (1-x^2)\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} + \sin^{-1} x(-2x)$$
$$= \sqrt{(1-x^2)} - 2x.\sin^{-1} x$$

*Contoh 2.*Jika y = $\tan^{-1}$(2x-1),tentukan $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(2x-1)^{2.}}2 = \frac{2}{1+4x^2-4x+1}$$
$$= \frac{2}{2+4x^2-4x} = \frac{1}{2x^2-2x+1}$$

Koefisien diferensial untuk invers fungsi hiperbolik

Dengan jalan yang sama,apa yang kita jumpai dalam invers fungsi trigonometrik,kita jumpai juga dalam invers fungsi hiperbolik.

(i) y= $\sin^{-1}$x untuk mendapatkan $\frac{dy}{dx}$

Pertama-tama nyatakanlah untuk invers menjadi bentuk langsung

$$y = \sin^{-1} x \therefore x = \sinh y \therefore \frac{dy}{dx} = \cosh y \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y}$$

Sekarang kita harus menyatakan cosh y dalam x.

Kita ketahui bahwa:

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \therefore \cosh^2 y = \sinh^2 y + 1 = x^2 + 1$$
$$\cosh y = \sqrt{(x^2+1)}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)}} \therefore \frac{d}{dx}\{\sinh^{-1} x\} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)}}$$

Marilah kita cari dan lihat hasil yang serupa untuk $\cosh^{-1}$x dan $\tanh^{-1}$x.

Telah kita tentukan bahwa $\frac{d}{dx}\{\sinh^{-1} x\} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)}}$

$$(ii)\ y = \cosh^{-1} x \therefore x = \cosh y$$
$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sinh y \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh y}$$

Kita kethui bahwa $\cosh^2$y-$\sinh^2$y =1 $\therefore$ $\sinh^2$y = $\cosh^2$y – 1 = x^2-1

$$\therefore \sinh y = \sqrt{(x^2-1)}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}} \therefore \frac{d}{dx}\{\cosh^{-1} x\} = \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$$

Sekarang silahkan anda kerjakan sisanya.

Jika y = $\tanh^{-1}$ x, $\frac{dy}{dx}$ =………………

Tangananilah dengan cara yang sama dengan cara untuk tan $^{-1}$x.Kali ini ingatlah bahwa sech^2 x = 1 – tanh^2 x, anda akan lihat bahwa hubungan ini diperlukan.

---

y = tanh^{-1}x

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x}}$$

$$y = \tanh^{-1} x \therefore x = \tanh y$$

Karena $\therefore \frac{dx}{dy} = \operatorname{sec}h^2 y = 1 - \tanh^2 y = 1 - x^2 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$

$$\frac{d}{dx}\left\{\tanh^{-1}\right\} = \frac{1}{1-x^2}$$

Nah inilah ketiga hasilnya bersama-sama, supaya kita dapat membandingkannya.

$$\frac{d}{dx}\left\{\sinh^{-1} x\right\} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (v)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\cosh^{-1} x\right\} = \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (v)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\tanh^{-1} x\right\} = \frac{1}{1-x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (vi)$$

Inilah satu atau dua contoh yang menggunakan hasil tadi.

Contoh 1. $y = \cosh^{-1}(3 - 2x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\left\{(3-2x)^2 - 1\right\}}}(-2) = \frac{-2}{\sqrt{(9 - 12x + 4x^2 - 1)}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{(8 - 12x + 4x^2)}} = \frac{-2}{2\sqrt{(2x^2 - 3x + 2)}} = \frac{-1}{\sqrt{(2x^2 - 3x + 2)}}$$

Contoh 2. y = tanh^{-1} $(\frac{3x}{4})$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - \left(\frac{3x}{4}\right)^2}\frac{3}{4} = \frac{1}{1 - \frac{9x^2}{16}}\frac{3}{4}$$

$$= \frac{16}{16 - 9x^2}\frac{3}{4} = \frac{12}{16 - 9x^2}$$

Contoh 3. $y = \sinh^{-1}\{\tan x\}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(\tan^2 x + 1)}}\sec^2 x = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec^2 x}}$$

$$= \sec x$$