BAB 6
INTEGRAL DAN PENGGUNAANNYA

6.1 Integral Taktentu (Antiturunan)

Fungsi F disebut *antiturunan* (integral) dari f pada interval I jika $\frac{dF}{dx} = f(x)$. Jika yang diketahui adalah $f(x)$, untuk mendapatkan $F(x)$ dilakukan pengintegralan. Secara umum ditulis,

$$\int f(x)dx = F(x) + C\ .$$

dengan C adalah konstanta. Simbol $\int f(x)dx$ [dibaca: integral dari $f(x)$ terhadap x]. Dalam hal ini, fungsi yang diintegralkan, yakni $f(x)$, disebut *integran*.

Berikut beberapa rumus dasar integral.

(1) $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$, $r \neq -1$

(2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, $x \neq 0$

(3) $\int e^x dx = e^x + C$

(4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(5) $\int \cos x dx = \sin x + C$

CONTOH 1 Hitung $\int x^2 dx$.

Penyelesaian

$$\int x^2 dx = \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C = \frac{1}{3} x^3 + C$$

Perhatikan bahwa *untuk mengintegralkan pangkat dari x, tambahkan pangkat dari x oleh 1 dan bagi oleh pangkat baru.*

CONTOH 2 Hitung $\int (2x^3 + \sqrt{x})dx$.

Penyelesaian

$$\int (2x^3 + \sqrt{x})dx = \int 2x^3 dx + \int x^{1/2} dx$$
$$= \frac{1}{2} x^4 + \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

6.2 Mengubah Bentuk $\int f(x)dx$ Menjadi $\int f(u)du$: Metode Substitusi

Jika $u = g(x)$ disubstitusikan pada $f(x)$ sehingga mengubah $\int f(x)dx$ menjadi $\int f(u)du$ dan jika F adalah antiturunan dari f,

$$\int f(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C\ .$$

CONTOH 1 Hitung $\int (x+1)(x^2+2x)^2\,dx$.

Penyelesaian

Misal $u = x^2 + 2x$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 2 = 2(x+1) \rightarrow \frac{1}{2}du = (x+1)dx$$

maka

$$\int (x+1)(x^2+2x)^2\,dx = \int (x^2+2x)^2\left[(x+1)dx\right]$$

$$= \int u^2 \cdot \frac{1}{2}du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{1}{6}\left(x^2+2x\right)^3 + C$$

CONTOH 2 Hitung $\int (2x^3+1)\sqrt{x^4+2x-5}\,dx$.

Penyelesaian

Misal $u = x^4 + 2x - 5$

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 + 2 = 2(2x^3+1) \rightarrow \frac{1}{2}du = (2x^3+1)dx$$

maka

$$\int (2x^3+1)\sqrt{x^4+2x-5}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}\left(x^4+2x-5\right)^{3/2} + C$$

CONTOH 3 Hitung $\int \frac{x+1}{x^2+2x-5}dx$.

Penyelesain

Misal $u = x^2 + 2x - 5$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 2 = 2(x+1) \rightarrow (x+1)dx = \frac{1}{2}du$$

Maka

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x-5| + C .$$

CONTOH 4 Hitung $\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$.

Penyelesaian

Misal $u = e^x + 2$

$du = e^x dx$

Maka

$$\int \frac{e^x}{e^x+2}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|e^x+2| + C .$$

CONTOH 5 Hitung $\int \sin 2x dx$.

Penyelesaian

Misal $u = 2x$

$\frac{du}{dx} = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}du = dx$

maka

$$\int \sin 2x dx = \int \sin u \cdot \frac{1}{2}du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

CONTOH 6 Hitung $\int \sin^3 x \cos x dx$.

Penyelesaian

Misal $u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x \rightarrow du = \cos x dx$

maka

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

6.3 Teorema Dasar Kalkulus: Integral Tentu

Jika *f* kontinu (terintegralkan) pada [*a*, *b*] dan *F* adalah antiturunan dari *f*,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

a disebut batas bawah dan *b* batas atas.

CONTOH 1 Hitung $\int_1^3 x dx$.

Penyelesaian

$$\int_1^3 x dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\left[3^2 - 1^2\right] = 4 .$$

CONTOH 2 Hitung $\int_0^2 (x^2 + x^{1/2})dx$.

Penyelesaian

$$\int_0^3 (x^2 + x^{1/2})dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^3 = \left[\frac{1}{3}(3)^3 + \frac{2}{3}(3)^{3/2}\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^2 + \frac{2}{3}(0)^{3/2}\right] \approx 12{,}46$$

CONTOH 3 Hitung $\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx$.

Penyelesaian

Misal $u = 2x$ maka $du = 2dx \rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

Batas bawah: $x = 0 \rightarrow u = 0$ dan batas atas: $x = \pi/2 \rightarrow u = 2x = \pi$

sehingga

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin u du = -\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\left[\cos\pi - \cos 0\right] = -\frac{1}{2}\left[-1 - 1\right] = 1$$

CONTOH 4 Hitung $\int_0^2 (2x+1)\sqrt{x^2 + x + 2}dx$.

Penyelesaian

Misal $u = x^2 + x + 2$ maka $\frac{du}{dx} = 2x + 1 \rightarrow du = (2x+1)dx$

Batas bawah : $x = 0 \rightarrow u = 0^2 + 0 + 2$ dan

Batas atas : $x = 1 \rightarrow u = 1^2 + 1 + 2 = 4$

sehingga

$$\int_0^1 (2x+1)\sqrt{x^2 + x + 2}dx = \int_2^4 u^{1/2}du = \frac{2}{3}u^{3/2} = \frac{2}{3}\left[(4)^{3/2} - (2)^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\left[8 - 2\sqrt{2}\right] \approx 3{,}45$$

6.4 Beberapa Sifat Integral Tentu

Berikut adalah sifat-sifat integral tentu.

(1) Linier

(i) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(ii) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(2) Penambahan Interval

Jika f terintegralkan pada interval $[a, c]$ yang di dalamnya ada b,

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

(3) Sifat Pembandingan

Jika f dan g terintegralkan pada interval $[a, b]$ dan $f(x) < g(x)$ untuk semua x dalam $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

(4) Sifat simetri

Jika f fungsi genap,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

Jika f fungsi ganjil,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

CONTOH 1 Hitung $\int_1^5 2(x+1)dx$.

Penyelesaian

$$\int_1^5 2(x+1)dx = 2\int_1^2 xdx + 2\int_1^2 dx = 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 + 2[x]_1^2 = 2\cdot\frac{3}{2} + 2\cdot 1 = 5 .$$

CONTOH 2 Hitung $\int_{-2}^3 |x|\,dx$.

Penyelesaian

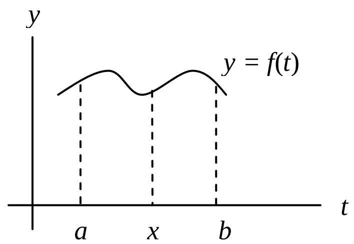
$$\int_{-2}^3 |x|\,dx = \int_{-2}^0 -xdx + \int_0^3 xdx = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = -2 + \frac{9}{2} = 2\tfrac{1}{2} .$$

6.5 Pendiferensialan Integral Tentu

Jika f terintegralkan pada $[a, b]$ yang memuat variabel x, berlaku

(1) $\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$

(2) $\frac{d}{dx}\left[\int_x^b f(t)dt\right] = -f(x)$



$$(3)\quad \frac{d}{dx}\left[\int_a^{u(x)} f(t)dt\right] = \frac{d}{du}\left[\int_a^{u} f(t)dt\right]\cdot\frac{du}{dx} = f(u)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$(4)\quad \frac{d}{dx}\left[\int_{u(x)}^{b} f(t)dt\right] = \frac{d}{du}\left[\int_u^{b} f(t)dt\right]\cdot\frac{du}{dx} = -f(u)\cdot\frac{du}{dx}$$

CONTOH 1 Cari $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t\,dt\right]$.

Penyelesaian

Cara konvensional, cari dulu

$$\int_1^x t\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_1^x = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1^2\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Selanjutnya

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t\,dt\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right] = x$$

Sementara itu, menggunakan rumus pendiferensialan integral tentu, lebih mudah, yakni

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t\,dt\right] = x.$$

CONTOH 2 Hitung $\frac{d}{dx}\left[\int_2^x \frac{2t+5}{\sqrt{t^2+16}}\right]dt$.

Penyelesaian

$$\frac{d}{dx}\left[\int_2^x \frac{2t+5}{\sqrt{t^2+16}}\right]dt = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+16}}.$$

CONTOH 3 Hitung $\frac{d}{dx}\left[\int_x^4 \sin^2 u\cos u\,du\right]$.

Penyelesaian

Perhatikan rumus untuk pendiferensialan integral tentu terhadap batas bawah.

$$\frac{d}{dx}\int_x^4 \sin^2 u\cos u\,du = -\sin^2 x\cos x.$$

CONTOH 4 Hitung $\frac{d}{dx}\left[\int_2^{x^2} t^2\,dt\right]$.

Penyelesaian

Perhatikan bahwa, dalam kasus ini, batas atasnya adalah x^2. Untuk itu, gunakan aturan rantai sebagai berikut.

Misal $\quad u = x^2$ maka $\dfrac{du}{dx} = 2x$.

Selanjutnya

$$\frac{d}{dx}\left[\int_2^{x^2} t^2\,dt\right] = \frac{d}{du}\left[\int_2^{u} t^2\,dt\right]\cdot\frac{du}{dx} = u^2\cdot 2x = (x^2)^2\cdot 2x = 2x^5 .$$

6.6 Pengintegralan Parsial

Pengintegralan parsial diterapkan ketika pengintegralan substitusi tidak dapat dilakukan. Rumusnya sebagai berikut:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du .$$

CONTOH 1 Hitung $\int x\sqrt{x+1}\,dx$.

Penyelesaian

Integral ini sebetulnya dapat diselesaikan menggunakan metode substitusi sebagai berikut.

Misal $u = x+1 \rightarrow du = dx$

maka

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (u-1)\sqrt{u}\,du$$

$$= \int \left(u^{3/2} - u^{1/2}\right)du = \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$$

Integral di atas juga dapat diselesaikan dengan pengintegralan parsial sebagai berikut.

Misal $\quad u = x \rightarrow du = dx$

$$dv = \sqrt{x+1}\,dx \rightarrow v = \int \sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$$

$$\int v\,du = \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}dx = \frac{4}{15}(x+1)^{5/2}$$

sehingga

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= x\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C$$

Kedua jawaban di atas tampak berbeda. Akan tetapi, jika masing-masing disederhanakan lagi, akan diperoleh hasil yang sama. Coba buktikan.

CONTOH 2 Hitung $\int x\sin x\,dx$.

Penyelesaian

Misal $\quad u = x \rightarrow du = dx$

$$dv = \sin x\, dx \rightarrow \quad v = \int \sin x dx = -\cos x$$

selanjutnya

$$\int v du = \int (-\cos x) dx = -\sin x$$

maka

$$\int x \sin x dx = \int u dv = uv - \int v du = x(-\cos x) - (-\sin x) + C = x\cos x + \sin x + C$$

Catatan: *u dan dv harus dipilih setepat mungkin agar pengintegralan menjadi lebih sederhana.*

CONTOH 3 Hitung $\int t^2 \cos 4t dt$.

Penyelesaian

Misal $u = t^2 \rightarrow \quad du = 2tdt$

$$dv = \cos 4t dt \rightarrow \quad v = \int \cos 4t dt = \frac{1}{4}\sin 4t$$

$$\int v du = \frac{1}{2}\int t \sin 4t dt$$

Integral ini, kembali harus dicari dengan cara parsial sebagai berikut:

Misal $w = t \rightarrow \quad dw = dt$

$$dz = \sin 4t dt \rightarrow \quad z = \int \sin 4t dt = -\frac{1}{4}\cos 4t$$

$$\int z dw = -\frac{1}{4}\int \cos 4t dt = -\frac{1}{16}\sin 4t$$

maka

$$\int t \sin 4t dt = \int w dz = wz - \int z dw = -\frac{1}{4} t\cos 4t + \frac{1}{16}\sin 4t$$

sehingga

$$\int v du = \frac{1}{2}\int t \sin 4t dt = -\frac{1}{8} t \cos 4t + \frac{1}{32}\sin 4t$$

Dengan demikian diperoleh

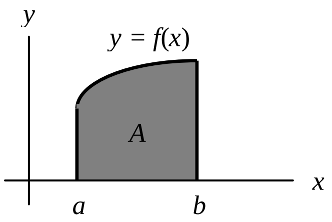
$$\int t^2 \cos 4t dt = \int u dv = uv - \int v du$$

$$= \frac{1}{4} t^2 \sin 4t + \frac{1}{8} t\cos 4t - \frac{1}{32}\sin 4t + C$$

6.7 Penggunaan Integral

6.7.1 Luas Daerah Bidang Datar

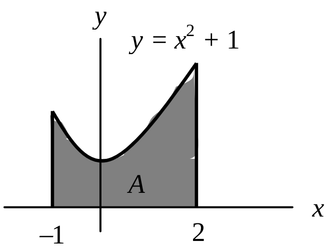
Daerah di atas sumbu-*x* Luas daerah dibatasi oleh kurva $y = f(x) > 0$, $y = 0$, $x = a$, dan $x = b$ adalah



$$A = \int_a^b y\,dx$$

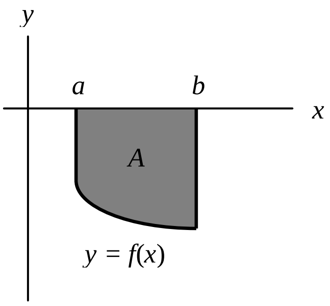
CONTOH 1 Cari luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$ dan $x = 2$.

Penyelesaian



$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{2} \\ &= \left[\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2\right] - \left[\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + (-1)\right] \\ &= 6 \end{aligned}$$

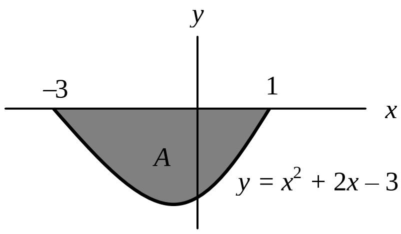
Daerah di bawah sumbu-*x* Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x) < 0$, $y = 0$, $x = a$, dan $x = b$ adalah



$$A = -\int_a^b y\,dx$$

CONTOH 2 Cari luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 + 2x - 3$ dan $y = 0$.

Penyelesaian



Titik potong kurva dengan sumbu-*x*

$y = x^2 + 2x - 3 = 0$

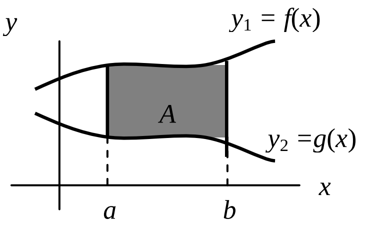
$(x + 3)(x - 1) = 0$

$x = -3$ dan $x = 1$

Daerah yang dimaksud ditunjukkan pada gambar di atas. Luasnya adalah

$$\begin{aligned} A &= -\int_{-3}^{1} \left(x^2 + 2x - 3\right) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_{-3}^{1} \\ &= -\left[\left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 + 1^2 - 3\cdot 1\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-3)^3 + (-3)^2 - 3\cdot(-3)\right)\right] \\ &= 10\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Daerah yang dibatasi oleh dua kurva Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, $x = a$, dan $x = b$, dengan $y_1 > y_2$ adalah



$$A = \int_a^b \left(y_1 - y_2\right) dx$$

CONTOH 3 Cari luas daerah yang dibatasi oleh $y = 2 - x^2$ dan $y = x$.

Penyelesaian

Daerah yang dimaksud ditunjukkan pada gambar. Batas bawah dan batas atas integral diperoleh dengan mencari titik potong kedua kurva sebagai berikut.

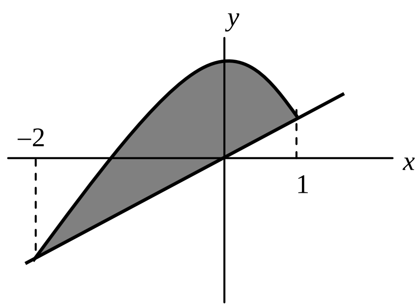
$y_1 = y_2$ maka

$$2 - x^2 = x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$x = -2$ (batas bawah) dan $x = 1$ (batas atas).



Dengan demikian,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} \left[\left(2 - x^2\right) - x\right] dx \\ &= \int_{-2}^{1} \left(2 - x - x^2\right) dx \end{aligned}$$

$$= \left[2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^{1}$$

$$= \left[2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 \right] - \left[2 \cdot (-2) - \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 \right]$$

$$= 4{,}5$$

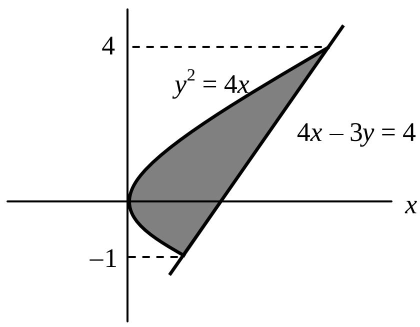
Catatan Jika daerahnya dibatasi oleh $x_1 = f(y)$, $x_2 = g(y)$, $y = c$, dan $y = d$, dengan $x_1 > x_2$,

$$A = \int_c^d (x_1 - x_2)\, dy$$

CONTOH 4 Cari luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y^2 = 4x$ dan garis $4x - 3y = 4$.

Penyelesaian

Titik potong kedua kurva



$$x_1 = x_2 \rightarrow \frac{y^2}{4} = \frac{3y+4}{4}$$

$$y^2 - 3y + 4 = 0$$

$$(y+1)(y-4) = 0$$

$y = -1$ (batas bawah) dan $y = 4$ (batas atas)

Dengan demikian,

$$A = \int_a^b (x_2 - x_1)\, dy$$

$$= \int_{-1}^{4} \left[\left(\frac{3y+4}{4} \right) - \frac{y^2}{4} \right] dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{4} (3y + 4 - y^2)\, dy$$

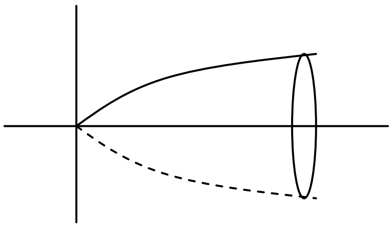
$$= \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2}y^2 + 4y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-1}^{4}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{3}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 4^3 \right) - \left(\frac{3}{2} \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 \right) \right]$$

$$= \frac{125}{24}$$

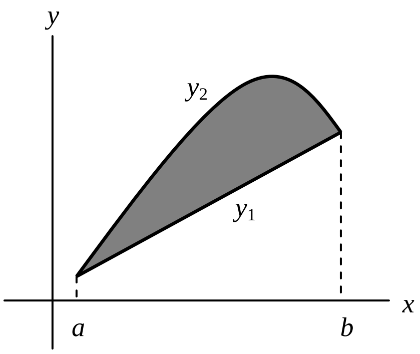
6.7.2 Volume Benda Putar

Pemutaran terhadap sumbu-x Jika $y = f(x)$ dengan batas $a \le x \le b$ diputar ke sumbu-x positif, volume yang dihasilkannya adalah



$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Jika bidang yang diputar dibatasi oleh dua kurva,



$$V = \pi \int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2 \right) dx$$

CONTOH 1 Sebuah bidang *R* didefinisikan sebagai daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, dan $x = 4$. Cari volume yang dihasilkan jika *R* diputar ke sumbu-*x*.

Penyelesaian

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^3 x^2 dx = \pi \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = \pi \left[\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 0 \right] = 9\pi \text{ satuan volume.}$$

CONTOH 2 Sebuah bidang R didefinisikan sebagai daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$, $y = x + 2$, dan $x = 0$. Cari volume yang dihasilkan jika *R* diputar ke sumbu-*x*.

Penyelesaian

Batas-batas integral dapat ditentukan oleh titik potong kedua grafik maka

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x^2 = x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ dan } x = 2$$

Akan tetapi $x = -1$ berada di luar daerah yang didefinisikan maka batas bawah integral adalah $x = 0$ dan batas atasnya $x = 2$ sehingga

$$V = \pi \int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2 \right) dx = \pi \int_0^2 \left[(x+2)^2 - x^4 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left[(x^2 + 4x + 4) - x^4 \right] dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2$$

$$= 12\tfrac{4}{15}\pi \text{ satuan volume}$$