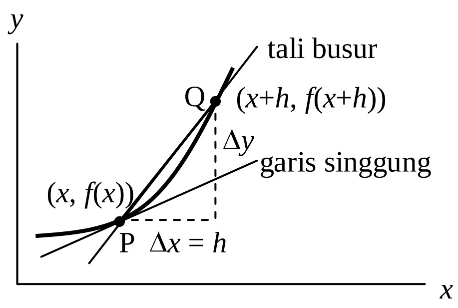
BAB 4
TURUNAN

4.1 Gradien Garis Singgung

Tinjau sebuah kurva $y = f(x)$ seperti diperlihatkan pada **Gambar 4.1**. Garis yang melalui titik $P(x_1, f(x_1))$ dan $Q(x_1 + \Delta x, f(x_1 + \Delta x))$ disebut tali busur. Gradien tali busur tersebut adalah

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

Jika titik Q digerakkan menuju P, Δx mendekati 0. Pada keadaan ini, Δy juga mendekati 0. Akan tetapi, $\Delta y/\Delta x$ menuju nilai tertentu dan kenyataan ini mengantarkan pada penggunaan konsep limit.



Gambar 4.1

Gradien garis singgung didifinisikan sebagai limit $\Delta y/\Delta x$ ketika Δx mendekati 0, yakni

$$\boxed{m = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

CONTOH 1 Tentukan gradien garis singgung pada kurva $y = f(x) = x^2 + 1$ pada titik (1, 2). Tuliskan persamaan garis singgungnya.

Penyelesaian

Gradien garis singgung pada titik (1,2) sebagai berikut.

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\{(1+h)^2 + 1\} - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{(1 + 2h + h^2) + 1\} - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2 + h)$$

$$= 2$$

Persamaan garis singgung dengan gradien *m* = 2 dan melalui titik (1, 2) sebagai berikut.

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$= 2(x - 1) + 2$$

$$= 2x$$

Jadi, persamaan garis singgung pada kurva $y = f(x) = x^2 + 1$ pada titik (1, 2) adalah $y = 2x$.

4.2 Definisi dan Lambang Turunan

Turunan sebuah fungsi *f* adalah fungsi lain *f'* yang memiliki nilai pada suatu bilangan *x* didefinisikan sebagai

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

yang menjamin bahwa limit itu ada dan bukan ∞ atau –∞.

Jika limit itu ada, dikatakan bahwa fungsi tersebut terdiferensialkan pada *x*. Pencarian turunan disebut pendiferensialan.

Lambang turunan dapat dituliskan dalam beberapa bentuk. Lambang-lambang yang digunakan untuk fungsi yang diturunkan terhadap *x* sebagai berikut.

$f'(x)$ $\qquad$ $D_x\,[f(x)]$ $\qquad$ $\dfrac{d}{dx}[f(x)]$ $\qquad$ $\dfrac{dy}{dx}$

Ketiganya memiliki makna yang sama atau, dengan kata lain,

$$f'(x) = D_x[f(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{dy}{dx} .$$

CONTOH 1 Cari turunan dari *f(x)* = 2*x* +5.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[2(x+h)+5]-[2x+5]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Jadi, turunan dari *f(x)* = 2*x* +5 adalah *f'*(*x*) = 2.

CONTOH 2 Cari turunan dari $f(x) = x^2$.

Penyelesaian

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x+h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

Jadi, turunan dari $f(x) = x^2$ adalah $f'(x) = 2x$.

CONTOH 3 Cari $\frac{dy}{dx}$ jika $y = \sqrt{x}$.

Penyelesaian

Ambil $f(x) = \sqrt{x}$ maka

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Jadi, $y = \sqrt{x}$ maka $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

4.3 Aturan Pencarian Turunan

Pencarian turunan menggunakan limit merupakan pekerjaan yang sulit dan menjemukan. Akan tetapi, dari dua contoh di atas, kita mendapatkan metode yang lebih singkat. Teorema-teorema yang berkaitan dengan aturan pencarian turunan sebagai berikut.

Untuk k konstanta, n real, $u = u(x)$, dan $v = v(x)$:

(1) $f(x) = k$ maka $f'(x) = 0$.

(2) $f(x) = x^n$ maka $f'(x) = nx^{n-1}$.

(3) $g(x) = k \cdot f(x)$ maka $g'(x) = k \cdot f'(x)$

(4) $f(x) = u \pm v$ maka $f'(x) = u' \pm v'$

(5) $f(x) = uv$ maka $f'(x) = u'v + uv'$

(6) $f(x) = \dfrac{u}{v}$ maka $f'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

CONTOH 1 Cari turunan dari $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5$.

Penyelesaian

Dengan menggunakan aturan (1), (2), (3), dan (4) diperoleh

$$f'(x) = 3 \cdot 2x^{3-1} + 2 \cdot x^{2-1} - 0 = 6x^2 + 2x$$

CONTOH 2 Cari turunan dari $f(x) = (x^2 - 2x + 6)^2$.

Penyelesaian

Fungsi di atas dapat dianggap sebagai hasil kali dua buah fungsi sebagai berikut.

$$f(x) = uv$$

dengan

$$u = v = x^2 - 2x + 6$$

Gunakan aturan (6), $f'(x) = u'v + uv'$, diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-2)(x^2-2x+6)+(x^2-2x+6)(2x-2) \\ &= 2(2x-2)(x^2-2x+6) \\ &= 4x^3-12x^2+32x-24 \end{aligned}$$

Untuk menguji kebenarannya, gunakan cara lain

$$f(x)=(x^2-2x+6)^2 = x^4-4x^3+16x^2-24x+36$$

maka sesuai aturan (1), (2), (3), (4), dan (5) diperoleh

$$f'(x)=4x^3-12x^2+32x-24$$

CONTOH 3 Cari turunan dari $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Penyelesaian

Misal $u = x$ dan $v = x^2 + 1$ maka $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{u}{v}$

sehingga dengan aturan hasil bagi,

$$f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}=\frac{1\cdot(x^2+1)-2x\cdot x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

4.4 Turunan Fungsi Komposisi: Aturan Rantai

Jika $f(u)$ terdiferensialkan pada $u = g(x)$ dan $g(x)$ terdiferensialkan pada x, fungsi komposisi $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(u)$ terdiferensialkan pada x. Turunan fungsi komposisi ini dapat dicari menggunakan rumus berikut.

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

Rumus di atas disebut aturan rantai.

CONTOH 1 Cari $\dfrac{dy}{dx}$ jika $y=(x+2)^2$.

Penyelesaian

Dengan metoda biasa, $y=(x+2)^2 = x^2+4x+4$ maka

$$\frac{dy}{dx}=2x+4=2(x+2).$$

Dengan aturan rantai: misal $u=x+2$ maka $y=(x+2)^2=u^2$. Dengan demikian,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 1 = 2(x+2) = 2x+4 .$$

CONTOH 2 Cari turunan dari $y = (x^2 + 1)^3$.

Penyelesaian

Misal $u = x^2 + 1$ maka $y = (x^2 + 1)^3 = u^3$. Dengan demikian,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot 2x = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 1)^2 .$$

CONTOH 3 Cari $\frac{dy}{dx}$ jika $y = \frac{1}{(2x-5)^3}$.

Penyelesaian

Misal $u = 2x - 5$ maka $y = \frac{1}{(2x-5)^3} = \frac{1}{u^3} = u^{-3}$. Dengan demikian,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -3u^{-4} \cdot 2 = -6(2x-5)^{-4} = -\frac{6}{(2x-5)^4} .$$

Ketika menerapkan aturan rantai, akan cukup membantu jika kita menggunakan tahapan berikut: *turunkan fungsi" luar" f dan fungsi "dalam" masing*-*masing, lalu kalikan satu sama lain.* Perhatikan contoh berikut.

CONTOH 4 Cari $\frac{dy}{dx}$ jika $y = \sqrt{2x - x^2}$.

Penyelesaian

Ubah bentuk fungsi di atas menjadi

$$y = (2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\underbrace{2x - x^2}_{dalam})^{\frac{1}{2}}}_{luar} = \underbrace{\tfrac{1}{2}(2x - x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{turunan\text{"}luar\text{"}} \cdot \underbrace{(2-2x)}_{turunan\text{"}dalam\text{"}}$$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}} .$$

4.5 Turunan Fungsi Trigonometri

Untuk menurunkan fungsi sinus dan cosinus, kita dapat menggunakan konsep limit dan identitas penjumlahan sudut:

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

Turunan fungsi sinus, $f(x) = \sin x$, sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\frac{(\cos h-1)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\cos x\frac{\sin h}{h}\right) \\
&= \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1 \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

Turunan fungsi cosinus, $f(x) = \cos x$, sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos x &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\frac{(\cos h-1)}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\sin x\frac{\sin h}{h}\right) \\
&= \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1 \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

Dari penurunan di atas diperoleh teorema sebagai berikut.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad \text{dan} \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x}$$

Turunan fungsi trigonometri dasar lainnya dapat diperoleh dengan bantuan teorema di atas.

CONTOH 1 Cari turunan dari $y = \tan x$.

Penyelesaian

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \equiv \frac{u}{v}$$

maka, sesuai aturan hasil bagi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x)\cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Jadi,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x}$$

CONTOH 2 Tentukan $\frac{d}{dx}\sec x$.

Penyelesaian

Dengan mengingat bahwa $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ dan turunan hasil bagi: $y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, diperoleh

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = \frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x)\cdot 1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

Jadi,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x}$$

CONTOH 3 Cari turunan dari $y = 2 \sin 2x$.

Penyelesaian

Dengan menggunakan aturan rantai,

$$\frac{dy}{dx} = (2\cos 2x)\cdot 2 = 4\cos 2x\,.$$

CONTOH 4 Cari turunan dari $y = \cos^2 x$

Dengan menggunakan aturan rantai,

$$\frac{dy}{dx} = (2\cos x)\cdot(-\sin x) = -2\sin x\cos x = \sin 2x$$

CONTOH 5 Cari turunan dari $y = \sin^3 (2x)$.

Penyelesaian

Dengan menggunakan aturan rantai,

$$\frac{dy}{dx} = (3(\sin 2x)^2)\cdot(\cos 2x)\cdot(2) = 6\sin^2 2x\cos 2x\,.$$

4.6 Turunan Fungsi Logaritma dan Eksponen Asli

Turunan fungsi logaritma dan eksponen natural sebagai berikut:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x},\ x > 0 \qquad \text{dan} \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x}$$

CONTOH 1 Cari $\frac{dy}{dx}$ jika $y = \ln(x^2 + 2x)$.

Penyelesaian

Misal $u = x^2 + 2x \rightarrow y = \ln u$

maka $\frac{du}{dx} = 2x + 2$ dan $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{x^2 + 2x}$

sehingga sesuai aturan rantai diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{2x+2}{x^2+2x}\,.$$

CONTOH 2 Cari $\frac{dy}{dx}$ jika $y = e^{x^2 - 4x}$.

Penyelesaian

Misal $u = x^2 - 4x \;\rightarrow\; y = e^u$

maka $\dfrac{du}{dx} = 2x - 4$ dan $\dfrac{dy}{du} = e^u = e^{x^2-4x}$

sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^{x^2-4x}(2x-4)\ .$$

CONTOH 3 Cari $\dfrac{dy}{dx}$ jika $y = xe^x$.

Penyelesaian

Misal $u = x$ dan $v = e^x \rightarrow\; y = uv$ sehingga

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} = xe^x + e^x \cdot 1 = e^x(x+1)\ .$$

4.7 Turunan Orde Tinggi

Turunan dari *f* adalah *f'*. Jika *f'* didiferensialkan lagi, diperoleh *f''*. *f'* disebut turunan pertama dan *f''* turunan kedua. Jika didiferensialkan lagi dan lagi, diperoleh turunan ketiga (*f'''*), keempat ($f^{(4)}$), kelima ($f^{(5)}$), dan seterusnya. Lambang turunan dari $y = f(x)$ untuk orde tinggi diberikan pada **Tabel 4-1**.

Tabel 4-1

Lambang turunan orde tinggi

Turunan	**Lambang *f'***	**Lambang *y'***	**Lambang *D***	**Lambang Leibniz**
Pertama	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\dfrac{dy}{dx}$
Kedua	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$
Ketiga	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\dfrac{d^3y}{dx^3}$
Keempat	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\dfrac{d^4y}{dx^4}$

Kelima	$f^{(5)}(x)$	$y^{(5)}$	$D_x^5 y$	$\frac{d^5 y}{dx^5}$
Keenam	$f^{(6)}(x)$	$y^{(6)}$	$D_x^6 y$	$\frac{d^6 y}{dx^6}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Ke-*n*	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^n y}{dx^n}$

CONTOH 1 Cari turunan kelima dari $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x - 8$.

Penyelesaian

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 10x + 6 \qquad f^{(4)}(x) = 24$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 10 \qquad f^{(5)} = 0$$

$$f'''(x) = 24x + 12$$

CONTOH 2 Cari $f'''(x)$ jika $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$.

Penyelesaian

Gunakan aturan turunan hasil kali maka

$$f'(x) = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \cdot \ln x = x + 2x \ln x$$

$$f''(x) = 1 + \left(2x \cdot \frac{1}{x} + 2 \ln x\right) = 3 + 2 \ln x$$

$$f'''(x) = 0 + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}$$

4.8 Pendiferensialan Implisit

Dalam beberapa kasus, y sebagai fungsi x tidak dapat dinyatakan secara eksplisit dalam bentuk $y = f(x)$, misalnya $y = x^2$. Sebagai contoh, persamaan

$$y^2 + 3y = x^2$$

tidak dapat ditulis menjadi $y = f(x)$ secara eksplisit Fungsi seperti ini disebut fungsi implisit, dengan kata lain y merupakan fungsi implisit dari x. Akan tetapi, turunan dari y terhadap x dapat dicari. Metode pencarian turunan fungsi implisit disebut pendiferensialan implisit.

Berikut beberapa contoh pendiferensialan implisit.

CONTOH 1 Cari $\frac{dy}{dx}$ dari persamaan berikut: $y^2 + 3y = x^2$.

Penyelesaian

Diferensialkan setiap suku di semua ruas terhadap *x*.

$$\frac{d}{dx}[y^2] + \frac{d}{dx}[3y] = \frac{d}{dx}[x^2]$$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} + 3 \cdot \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx}[2y + 3] = 2x$$

sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y + 3}$$

CONTOH 2 Cari $\frac{dy}{dx}$ dari persamaan berikut: $y^3 + 2xy - x^2 = 8$.

Penyelesaian

Diferensialkan setiap suku di setiap ruas terhadap *x*,

$$\frac{d}{dx}[y^3] + \frac{d}{dx}[2xy] - \frac{d}{dx}[x^2] = \frac{d}{dx}[8]$$

$$3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + \left[2y \cdot \frac{d}{dx}[x] + 2x \cdot \frac{d}{dx}[y]\right] - 2x = 0$$

$$3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 2y + 2x \cdot \frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

$$[3y^2 + 2x] \cdot \frac{dy}{dx} = 2[x - y]$$

sehingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2[x - y]}{3y^2 + 2x}$$

CONTOH 3 Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y^3 + 2xy - x^2 = 8$ di titik (0, 2).

Penyelesaian

Pada *CONTOH 2* telah diperoleh bahwa $\frac{dy}{dx}$ dari $y^3 + 2xy - x^2 = 8$ adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2[x-y]}{3y^2 + 2x}$$

Gradien garis singgung pada kurva tersebut di titik (0, 2) adalah

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0, y=2} = \frac{2(0-2)}{3\cdot 2^2 + 2\cdot 0} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Persamaan garis singgungnya di titik (0, 2) adalah

$$\begin{aligned} y &= m(x - x_1) + y_1 \\ &= -\frac{1}{3}(x-0) + 2 \\ &= -\frac{1}{3}x + 2 \end{aligned}$$

Jadi, garis singgung pada kurva $y^3 + 2xy - x^2 = 8$ di titik (0, 2) adalah $y = -\frac{1}{3}x + 2$ atau dapat ditulis sebagai $x + 3y - 6 = 0$.

4.9 Laju yang Berkaitan

Jika variabel *y* bergantung pada waktu *t*, turunannya, *dy/dt*, disebut *laju perubahan terhadap waktu*. Secara umum, setiap variabel yang bergantung waktu, turunannya disebut *laju*.

CONTOH 1 Sebuah partikel bergerak sepanjang sumbu-*x* dan posisinya sebagai fungsi waktu berubah menurut persamaan: $x = t^2 + 5t - 10$, dengan *x* dalam meter dan *t* dalam sekon. Cari laju perubahan posisi terhadap waktu (atau dikenal sebagai kecepatan) pada saat *t* = 2 sekon.

Penyelesaian

Turunan dari posisi terhadap waktu,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2t + 5$$

Pada *t* = 2 sekon,

$$v(2) = 2\cdot 2 + 5 = 9\,\text{m/s}.$$

CONTOH 2 Setiap sisi kubus bertambah dengan laju 3 cm per sekon. Tentukan laju perubahan volume kubus saat panjang sisinya 12 cm.

Penyelesaian

Misalnya sisi kubus dinyatakan oleh *s* maka volume kubus $V = s^3$. Laju pertambahan sisi kubus 3 cm/s, ini berarti $\frac{ds}{dt} = 3$ cm/s. Laju perubahan volume terhadap waktu,

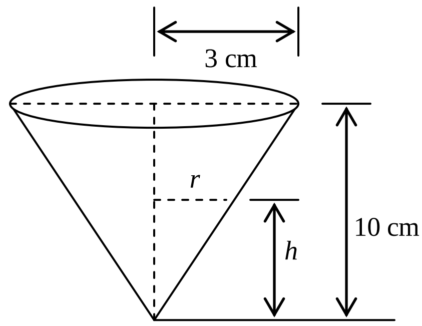
$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}[s^3] = 3s^2 \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Dengan demikian, pada s = 12 cm,

$$\frac{dV}{dt} = 3 \cdot (12)^2 \cdot 3 = 1296 \text{ cm}^3\text{/s.}$$

CONTOH 3 Seorang anak menyedot minuman dari sebuah cangkir berbentuk kerucut dengan laju 3 cm^3/s. Sumbu cangkir vertikal dan tinggi cangkir 10 cm dengan diameter bagian terbuka 6 cm. Tentukan laju penurunan tinggi cairan dalam cangkir ketika kedalamannya 5 cm.

Penyelesaian



Kedalaman cairan h dan jari-jari cangkir r maka volume cangkir (kerucut),

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Dari gambar diperoleh hubungan

$$\frac{r}{h} = \frac{3}{10} \rightarrow r = \frac{3h}{10}$$

maka

$$V = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{3h}{10}\right]^2 h = \frac{3\pi}{100}h^3$$

Laju perubahan volume terhadap waktu,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{3\pi}{100}h^3\right] = \frac{3\pi}{100} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

sehingga laju perubahan kedalaman terhadap waktu,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{100}{9\pi h^2} \cdot \frac{dV}{dt}$$

Karena cairan berkurang (disedot) dengan laju 3 cm^3/s, ini berarti

$$\frac{dV}{dt} = -3 \text{ cm}^3\text{/s.}$$ [tanda *negatif* menunjukkan *berkurang*]

Dengan demikian pada $h = 5$ cm diperoleh

$$\frac{dh}{dt} = \frac{100}{9\pi h^2} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{100}{9\pi \cdot 5^2} \cdot (-3) = -\frac{4}{3\pi} \text{ cm/s.}$$

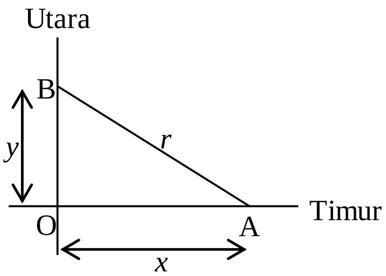
Jadi, laju penurunan kedalaman cairan adalah $\frac{4}{3\pi}$ cm tiap sekon.

CONTOH 4 Sepeda motor A bergerak lurus dengan kelajuan konstan 60 km/jam menuju ke Timur dan melintasi perempatan jalan tepat pada pukul 10.00. Sepeda motor B bergerak lurus ke Utara dengan kelajuan konstan 80 km/jam dan melintasi perempatan jalan yang sama pada pukul 10.15. Tentukan laju perubahan jarak kedua motor pada pukul 11.00.

Penyelesaian

Misalnya titik O adalah titik yang tepat di perempatan jalan. Pada suatu saat tertentu, jarak motor A ke O sebut saja *x*, jarak motor B ke O adalah *y*, dan jarak A dan B adalah *r*. Keadaan ini diilustrasikan pada gambar. Sesuai dengan dalil Phytagoras diperoeh hubungan

$$r^2 = x^2 + y^2 .$$



Laju perubahan jarak A dan B (*dr/dt*) diperoleh melalui pendiferensialan implisit pada persamaan di atas sebagai berikut.

$$\frac{d}{dt}r^2 = \frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$$

$$2r\frac{dr}{dt} = 2x\frac{dr}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{dr}{dt} = \frac{x}{r}\frac{dr}{dt} + \frac{y}{r}\frac{dy}{dt}$$

atau

$$\frac{dr}{dt} = \frac{x\frac{dr}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (*)$$

dengan $\frac{dx}{dt}$ = 60 km/jam dan $\frac{dy}{dt}$ = 80 km/jam. Jarak yang ditempuh motor A selama 1 jam (dari pukul 10.00 s.d. 11.00) adalah

$$x = \frac{dx}{dt} \cdot \Delta t = 60 \cdot 1 = 60 \text{ km},$$

sedangkan jarak yang ditempuh motor B selama 45 menit atau ¾ jam (dari pukul 10.15 s.d. 11.00) adalah

$$y = \frac{dy}{dt} \cdot \Delta t = 80 \cdot \frac{3}{4} = 60 \text{ km}.$$

Masukkan nilai-nilai di atas pada (*) diperoleh

$$\frac{dr}{dt} = \frac{x\frac{dr}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{60\cdot 60+60\cdot 80}{\sqrt{60^2+60^2}}=\frac{60(60+80)}{60\sqrt{2}}=70\sqrt{2}\ \text{km/jam}.$$

Jadi, laju perubahan jarak kedua motor pada pukul 11.00 adalah $70\sqrt{2}$ km/jam.

4.10 Diferensial dan Hampiran

Misalnya $y = f(x)$ terdiferensialkan pada setiap x. Dalam notasi Leibniz, turunan fungsi tersebut dituliskan sebagai

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

Sejauh ini, kita belum memberikan makna apa pun pada notasi *dy/dx*, selain sebagai lambang turunan yang tak terpisahkan. Pada bagian ini, kita akan memberikan makna pada *dy* dan *dx*.

Dari definisi turunan, untuk fungsi $y = f(x)$ yang terdiferensialkan berlaku

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)\,.$$

Jika Δx kecil,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\approx f'(x)$$

atau

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x\,.$$

Karena $\Delta x = dx$, persamaan di atas dapat ditulis

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)dx\,.$$

Ruas kanan pada persamaan ini didefinisikan sebagai diferensial dari y, dilambangkan oleh dy, yakni

$$dy=f'(x)dx\,.$$

Besaran dx disebut diferensial variabel bebas x dan dy disebut diferensial variabel terikat y.

Secara grafis, tafsiran diferensial diperlihatkan pada **Gambar 4.2**. Besaran dy menyatakan perubahan dalam garis singgung pada P ketika x berubah sebesar $\Delta x = dx$. Jika Δx sangat kecil, dy menjadi hampiran yang cukup baik pada Δy dan mudah untuk dicari.

Gamba 4.2

CONTOH 1 Cari *dy* jika (a) $y = 2x$, (b) $y = x^2 + 3x$, (c) $y = \sin x$.

Penyelesaian

Untuk mendapatkan diferensialnya, terlebih dahulu cari turunannya lalu kalikan dengan *dx*.

(a) $dy = 2dx$

(b) $dy = (2x + 3)dx$

(c) $dy = \cos x dx$

CONTOH 2 Gunakan diferensial untuk menghampiri nilai $\sqrt{1{,}01}$.

Penyelesaian

Nilai yang akan kita cari adalah $\sqrt{1{,}01}$. Karena itu, ambil fungsi $y = f(x) = \sqrt{x}$ dan kita akan mencari/menghampiri nilai $f(1{,}01)$. Turunan dari $f(x) = \sqrt{x}$ adalah

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

maka perubahannya dalam *y* adalah

$$\Delta y \approx f'(x)dx$$

atau

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x .$$

Sekarang, ambil $x = 1$ dan $\Delta x = 0{,}01$ maka

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

$$\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} \approx \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

$$\sqrt{1{,}01} - \sqrt{1} \approx \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot 0{,}01$$

$$\sqrt{1{,}01} - 1 \approx 0{,}005$$

Jadi, $\sqrt{1{,}01} \approx 1{,}005$.