# BAB 3
# LIMIT DAN KEKONTINUAN FUNGSI

## 3.1 Limit Fungsi

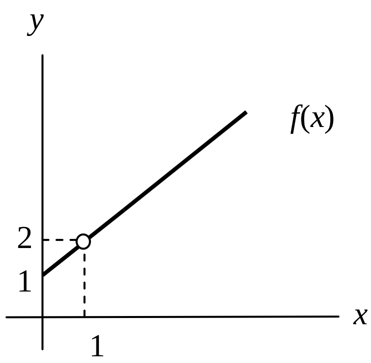
### 3.1.1 Pengantar Limit

Tinjau fungsi yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Perhatikan bahwa fungsi ini tidak terdefinisi pada $x = 1$ karena memiliki bentuk 0/0. Akan tetapi, muncul pertanyaan "apakah $f(x)$ mendekati bilangan tertentu ketika $x$ mendekati 1?". Berikut jawabannya dalam bentuk tabel dan grafik.

| *x* | *f(x)* |
|---|---|
| 1,01 | 2,01 |
| 1,001 | 2,001 |
| 1,0001 | 2,0001 |
| 1,00001 | 2,00001 |
| 1 | ? |
| 0,99999 | 1,99999 |
| 0,9999 | 1,9999 |




**Gambar 3.1**

Dari tabel di atas terlihat bahwa $f(x)$ *mendekati* 2 *ketika x mendekati* 1.

Selanjutnya, secara aljabar (melalui pemfaktoran), diperoleh

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x + 1.$$

Pembagian $(x - 1)/(x - 1) = 1$ adalah sah sebab $x \neq 1$. Dari sini diperoleh grafik $f(x)$ merupakan garis lurus seperti diperlihatkan pada **Gambar 3.1**. Akan tetapi, garis ini menyisakan lubang (ditandai oleh ○) pada titik (1,2) sebab $x \neq 1$. Kenyatan ini juga menuju pada simpulan bahwa $f(x)$ *mendekati* 2 *ketika x mendekati* 1.

Ungkapan $f(x)$ *mendekati* 2 *ketika x mendekati* 1 secara matematis ditulis

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

dan dibaca "limit ketika $x$ mendekati 1 dari $f(x)$ adalah 2". Dengan demikian, pada kasus di atas diperoleh

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

### 3.1.2 Definisi Intuitif Tentang Limit

Misalnya $f(x)$ terdefinisi pada interval buka I *kecuali pada c* dengan $c \in$ I. Jika $f(x)$ mendekati $L$ ketika $x$ mendekati $c$, kita katakan bahwa $f(x)$ mendekati limit $L$ ketika $x$ mendekati c dan ditulis sebagai

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = L}$$

Perlu dicatat bahwa ungkapan di atas tidak berarti bahwa $f(x) = L$ pada $x = c$. Ingat bahwa kita sedang berurusan dengan $f(x)$ yang tidak terdefinisi pada $x = c$.

Definisi di atas dikatakan definisi intuitif dan bersifat informal karena ungkapan *mendekati* tidak menunjukkan ketepatan hasil. Seberapa dekat $f(x)$ dengan $L$? Jawabannya tentu saja sangat bervariasi dan bersifat relatif.

*CONTOH 1* Cari $\lim\limits_{x \to 2}(2x+3)$.

**Penyelesaian**

Ketika $x$ mendekati 2, $2x + 3$ mendekati $2 \cdot 2 + 3 = 7$. Ungkapan ini ditulis

$$\lim_{x \to 2}(2x+3) = 2 \cdot 2 + 3 = 7 .$$

*CONTOH 2* Cari $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$.

**Penyelesaian**

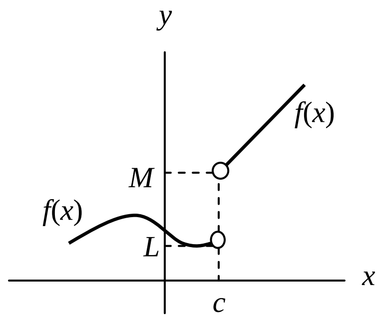
Perhatikan bahwa $(x^2 - x - 2)/(x - 2)$ tidak terdefinisi pada $x = 2$. Secara aljabar, melalui pemfaktoran, diperoleh

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x + 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+1) = 2 + 1 = 3 .$$

Catatan: $(x - 2)/(x - 2) = 1$ selama $x \neq 2$.

### 3.1.3 Eksistensi Limit dan Limit Sepihak

Fungsi $f(x)$ dikatakan memiliki limit pada $x$ mendekati $c$ apabila ketika dihampiri dari kedua sisi menuju nilai yang sama. Berdasarkan kenyataan ini, suatu fungsi boleh jadi tidak memiliki limit. Sebagai ilustrasi, perhatikan **Gambar 3.2**. Ketika $x$ mendekati $c$ dari kiri, $f(x)$ mendekati $L$, sedangkan ketika $x$ mendekati $c$ dari kanan, $f(x)$ mendekati $M$. Karena $f(x)$ tidak mendekati nilai yang sama ketika $x$ mendekati $c$ dari kedua sisi, dikatakan bahwa $f(x)$ tidak memiliki limit di $x$ mendekati $c$.




**Gambar 3.2**

Meskipun limit $f(x)$ ketika $x$ mendekati $c$ tidak ada, kita dapat mengatakan bahwa limit $f(x)$ ketika $x$ menuju $c$ dari satu pihak (dari kiri atau dari kanan) tetap ada. Limit seperti ini disebut limit sepihak. Jika $f(x)$ mendekati $L$ ketika $x$ mendekati $c$ dari kiri, disebut **limit kiri**, ditulis sebagai

$$\boxed{\lim_{x \to c^-} f(x) = L\,.}$$

Jika $f(x)$ mendekati $L$ ketika $x$ mendekati $c$ dari kanan, disebut **limit kanan**, ditulis sebagai

$$\boxed{\lim_{x \to c^+} f(x) = L\,.}$$

Berdasarkan hal di atas, suatu fungsi dikatakan memiliki limit jika dan hanya jika limit kiri sama dengan limit kanan. Dengan kata lain,

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ jika dan hanya jika } \lim_{x \to c^+} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to c^-} f(x) = L\,.}$$

*CONTOH 3* Cari apakah limit berikut ada atau tidak.

(a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ (b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$.

**Penyelesaian**

(a) Limit kiri

Untuk $x < 1$, $|x - 1| = -(x - 1)$ maka

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{-(x-1)}{(x-1)} = -1\,.$$

Limit kanan

Untuk $x \geq 1$, $|x - 1| = x - 1$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Karena $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1} \neq \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ maka $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ tidak ada.

(b) Limit kiri

Untuk $x < 1$, $|x - 1| = -(x - 1)$ maka

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \lim_{x \to 1^-} (-x-1) = -2$$

Limit kanan

Untuk $x \geq 1$, $|x - 1| = x - 1$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2 .$$

Karena $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2-1}{|x-1|} \neq \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2-1)}{|x-1|}$ maka $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ tidak ada.

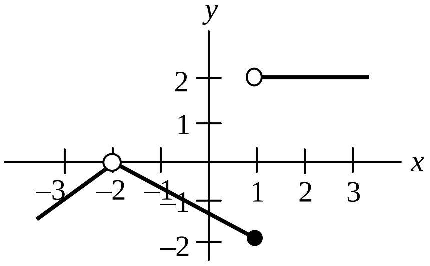
*CONTOH 4* Diketahui

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x < -1 \\ x^2, & x > -1 \end{cases} .$$

Tentukan (a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$, (b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, dan (c) ) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

**Penyelesaian**

*CONTOH 5* Sebuah fungsi $f(x)$ didefinisikan seperti diperlihatkan pada grafik di bawah ini. Tentukan (a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ dan (b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.



**Penyelesaian**

Dari grafik terlihat bahwa *f*(*x*) merupakan fungsi sebagian-sebagian. Daerah asal *f*(*x*) terdiri dari tiga bagian yakni $x < -2$, $-2 < x \leq 1$, dan $x > 1$. Limit *f*(*x*) ketika *x* mendekati –2 dan 1, ditentukan dengan terlebih dahulu mencari limit kiri dan kanannya sebagai berikut.

(a) Dari grafik terlihat bahwa limit dari *f*(*x*) ketika *x* mendekati 2 dari kiri (limit kiri) adalah

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 0$$

sedangkan limit kanan

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = 0$$

Karena $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} f(x) = 0$ maka $\lim_{x \to -2} f(x) = 0$

(b) Limit kiri

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -2$$

dan limit kanan

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

Karena $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$ maka $\lim_{x \to 1} f(x)$ tidak ada.

### 3.1.4 Definisi Tepat Tentang Limit

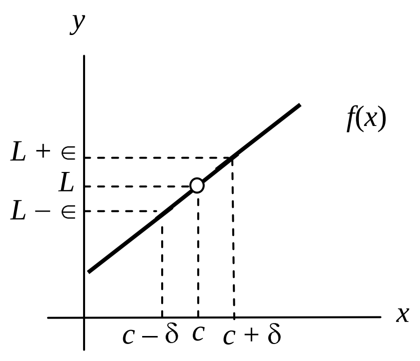
Definisi limit yang telah kita bahas sebelumnya masih berupa definisi intuitif dan belum menyatakan seberapa dekat *f*(*x*) pada *L* ketika *x* mendekati *c*. Di sini, kita akan mendefinisikan secara tepat tentang limit. Untuk menunjukkan bahwa *f*(*x*) sangat dekat dengan *L* jika *x* sangat dekat dengan *c*, kita dapat memilih selisih antara *f*(*x*) dan *L* sekecil mungkin jika selisih *x* dan *c* sangat kecil.

Untuk bilangan sangat kecil ∈ dan δ, definisi limit yang lebih tepat sebagai berikut:

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ menunjukkan bahwa ada ∈ > 0 yang berkaitan dengan δ > 0 sedemikian rupa sehingga $|f(x) - L| < \in$ yang diberikan oleh $0 < |x - c| < \delta$, yakni

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \in .$$

Ilustrasi definisi tepat tentang limit ditunjukkan pada **Gambar 3.3**. Pemilihan δ sekecil apapun akan menjamin selisih *f*(x) dan *L* lebih kecil daripada ∈.




**Gambar 3.3**

*CONTOH 6* Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)=1$.

**Penyelesaian**

Cari δ > 0 sedemikian rupa sehingga

$$0<|x-3|<\delta \Rightarrow |(2x-5)-1|<\in .$$

Perhatikan pertidaksamaan sebelah kanan.

$$|(2x-5)-1|<\in \Leftrightarrow |2x-6|<\in$$

$$\Leftrightarrow 2|x-3|<\in$$

$$\Leftrightarrow |x-3|<\frac{\in}{2}$$

Dari sini terlihat berapa nilai δ yang dapat dipilih, yakni $\delta = \in/2$.

Dengan memilih $\delta = \in/2$ maka 0 < |x – 3| < δ menunjukkan bahwa

$$|(2x-5)-1|=|2x-6|=2|x-3|<2\delta=\in$$

sehingga jelas bahwa

$$|(2x-5)-1|<\in .$$

Jadi, terbukti bahwa $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)=1$.

*CONTOH 7* Buktikan bahwa $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+4x+5}{x-1}=6$.

**Penyelesaian**

Cari δ > 0 sedemikian sehingga

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2+4x+5}{x-1}-6\right|<\in .$$

Untuk $x\neq 1$,

$$\left|\frac{x^2+4x+5}{x-1}-6\right|<\in \Leftrightarrow \left|\frac{(x-1)(x+5)}{x-1}-6\right|<\in$$

$$\Leftrightarrow \left|(x+5)-6\right|<\in$$

$$\Leftrightarrow \left|x-1\right|<\in$$

maka dapat dipilih $\delta = \in$.

Dengan memilih $\delta = \in$ maka $0 < |x - 1| < \delta$ menunjukkan bahwa

$$\left|\frac{x^2+4x+5}{x-1}-6\right| = \left|\frac{(x-1)(x+5)}{x-1}-6\right| = \left|x+5-6\right| = \left|x-1\right| < \delta = \in$$

sehingga jelas bahwa

$$\left|\frac{x^2+4x+5}{x-1}-6\right|<\in.$$

Jadi, terbukti bahwa $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+4x+5}{x-1}=6$.

*CONTOH 8* Buktikan bahwa $\lim\limits_{x\to 2} x^2+4x+3=15$.

**Penyelesaian**

Cari $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$0<|x-2|<\delta \Rightarrow \left|(x^2+4x+3)-15\right|<\in.$$

Selanjutnya

$$\left|(x^2+4x+3)-15\right| = \left|x^2+4x-12\right| = \left|x-2\right|\left|x+6\right|$$

Faktor $|x-2|$ dapat dibuat sekecil mungkin. Di lain pihak, untuk mendapatkan nilai $|x+6|$, pilih $\delta \le 1$ maka

$$|x+6| = |x-2+8| \le |x-2| + |8| < 9$$

Oleh karena itu, pilih $\delta \le \in/9$.

Dengan memilih $\delta \le \in/9$ maka $0 < |x - 2| < \delta$ menunjukkan bahwa

$$\left|(x^2+4x+3)-15\right| = \left|x^2+4x-12\right| = \left|x-2\right|\left|x+6\right| < 9\delta = \in$$

sehingga jelas bahwa

$$\left|(x^2+4x+3)-15\right|<\in.$$

Jadi, terbukti bahwa $\lim\limits_{x\to 2} x^2+4x+3=15$.

**SOAL-SOAL LATIHAN 3.1**

Buktikan bahwa limit berikut benar.

1. $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=10$

---

## 3.2 Mencari Limit Fungsi

Pada bagian ini kita akan menentukan berbagai limit fungsi secara aljabar dan sifat-sifat dasar limit.

### 3.2.1 Sifat-sifat Limit Fungsi

Teorema-teorema berikut menunjukkan aturan-aturan untuk menentukan limit fungsi. Jika *n* adalah bilangan bulat positif, *k* konstanta, dan *f* dan *g* fungsi yang memiliki limit pada *c*, berlaku teorema-teorema sebagai berikut.

(1) $\lim\limits_{x\to c} k = k$.

(2) $\lim\limits_{x\to c} x = c$.

(3) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, $f(x)$ fungsi polinom.

(4) $\lim\limits_{x\to c} kf(x) = k\cdot\lim\limits_{x\to c} f(x)$.

(5) $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to c} f(x)\pm\lim\limits_{x\to c} g(x)$.

(6) $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to c} g(x)$.

(7) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, $\qquad g(x)\neq 0$.

(8) $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$.

(9) $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, $\qquad f(x)>0$ untuk *n* genap.

*CONTOH 1* Cari $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2+x+5\right)$.

**Penyelesaian**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(2x^2+x+5\right) &= \lim_{x\to 2} 2x^2+\lim_{x\to 2} x+\lim_{x\to 2} 5\\
&= 2\cdot\lim_{x\to 2} x^2+\lim_{x\to 2} x+\lim_{x\to 2} 5\\
&= 2\left[\lim_{x\to 2} x\right]^2+\lim_{x\to 2} x+\lim_{x\to 2} 5\\
&= 2\cdot 2^2+2+5=15
\end{aligned}$$

*CONTOH 2* Cari $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}}{x-1}$.

**Penyelesaian**

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2+7}}{\lim\limits_{x\to 3}(x-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 3} x^2 + \lim\limits_{x\to 3} 7}}{\lim\limits_{x\to 3} x - \lim\limits_{x\to 3} 1}$$

$$= \frac{\sqrt{\left[\lim\limits_{x\to 3} x\right]^2 + 7}}{3-1}$$

$$= \frac{\sqrt{3^2+7}}{2} = 2$$

Pada *CONTOH 1* dan *CONTOH 2*, penyelesaian soal dilakukan dengan menuliskan secara rinci penerapan teorema-teorema di atas. Pada penyelesaian soal selanjutnya teorema di atas cukup diingat saja dan pengerjaan dilakukan secara langsung.

Jika penyebutnya nol, kita dapat melakukan manipulasi aljabar untuk menghindari pembangian dengan nol, seperti diperlihatkan pada contoh-contoh berikut.

*CONTOH 3* Cari $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\dfrac{x^2+4x-5}{x-1}}$.

**Penyelesaian**

Kita tidak dapat memasukkan $x$ = 1 secara langsung karena akan diperoleh bentuk 0/0. Untuk menghilangkan bentuk ini, pembilangnya kita faktorkan dulu sebagai berikut.

$$x^2+4x-5 = (x-1)(x+5)$$

maka

$$\frac{x^2+4x-5}{x-1} = \frac{(x-1)(x+5)}{x-1} = x+5$$

Perhatikan bahwa $(x - 1)/(x - 1) = 1$ karena $x \neq 1$. Dengan demikian diperoleh

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^2+4x-5}{x-1}} = \sqrt{\lim_{x\to 1}(x+5)} = \sqrt{1+5} = \sqrt{6}$$

*CONTOH 4* Cari $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

**Penyelesaian**

Untuk menghilangkan bentuk 0/0, kita faktorkan penyevutnya sebagai berikut.

$$x-4=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$$

maka

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

CONTOH 5 Cari $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}$ .

**Penyelesaian**

Untuk menghilangkan bentuk 0/0 pada limit di atas, kita rasionalkan pembilangnya dengan mengalikan pembilang dan penyebut masing-masing dengan sekawan dari pembilangnya.

$$\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}=\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}\cdot\frac{\sqrt{5+x}+\sqrt{5}}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5}}=\frac{x}{x(\sqrt{5+x}+\sqrt{5})}=\frac{1}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5}}\ .$$

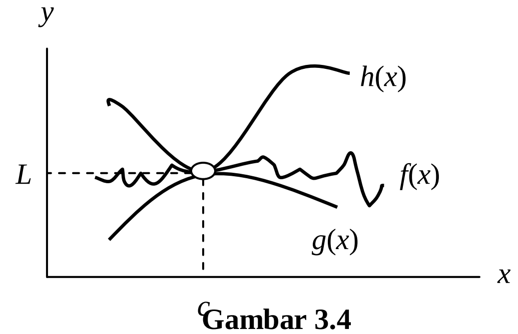
Dengan demikian diperoleh

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{10}\sqrt{5}\ .$$

### 3.2.2 Teorema Apit

Jika kita tidak dapat menentukan limit fungsi secara langsung, kita dapat mencarinya secara tidak langsung menggunakan teorema apit. Teorema ini mengacu pada sebuah fungsi yang diapit oleh dua fungsi lainnya, seperti ditunjukkan pada **Gambar 3.4**. Teoremanya sebagai berikut.

Misalnya *f*, *g*, dan *h* adalah fungsi yang memenuhi $g(x) \le f(x) \le h(x)$ untuk semua $x$ kecuali di $x = c$. Jika $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\lim\limits_{x\to c} h(x)=L$ , $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ .




**Gambar 3.4**

*CONTOH 6* Diketahui $|u(x)-5| \le x-2$ . Tentukan $\lim\limits_{x\to 2} u(x)$ .

**Penyelesaian**

$$|u(x)-5| \le x-2 \iff -(x-2) \le u(x)-5 \le (x-1)$$
$$-(x-2)+5 \le u(x) \le (x-2)+5$$
$$-x+7 \le u(x) \le x+3$$

Maka

$$\lim_{x\to 2}(-x+7) \le \lim_{x\to 2} u(x) \le \lim_{x\to 2}(x+3)$$
$$5 \le \lim_{x\to 2} u(x) \le 5$$

Jadi, $\lim\limits_{x\to 2} u(x) = 5$ .

*CONTOH 7* Tentukan $\lim\limits_{x\to 0} x^{3/4} \sin\frac{1}{x}$ .

**Penyelesaian**

Karena $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ maka, dengan mengalikan setiap ruas dengan $x^{3/4}$, diperoleh

$$-x^{3/4} \le x^{3/4}\sin\frac{1}{x} \le x^{3/4}$$

Gunakan teorema apit maka

$$\lim_{x\to 0}(-x^{3/4}) \le \lim_{x\to 0} x^{3/4}\sin\frac{1}{x} \le \lim_{x\to 0} x^{3/4}$$
$$0 \le \lim_{x\to 0} x^{3/4}\sin\frac{1}{x} \le 0$$

Jadi, $\lim\limits_{x\to 0} x^{3/4}\sin\frac{1}{x} = 0$ .

## 3.3 Limit Fungsi Trigonometri

Beberapa sifat dan rumus dasar limit trigonometri sebagai berikut.

(1) $\lim\limits_{x\to c} \sin x = \sin c$

(2) $\lim\limits_{x\to c} \cos x = \cos c$

(3) $\lim\limits_{x\to c} \tan x = \tan c$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$

*CONTOH 1* Buktikan bahwa $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ .

**Penyelesaian**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x/\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x}\right)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)=1\cdot\frac{1}{\cos 0}=1$$

*CONTOH 2* Cari $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ .

**Penyelesaian**

Kalikan penyebut dan pembilang dengan 2, diperoleh

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin 2x}{2x}=2\cdot\lim_{p\to 0}\frac{\sin p}{p}=2\cdot 1=2$$

Catatan: Kita dapat mengganti $2x = p$. Dengan demikian $p \to 0$ jika $x \to 0$ sehingga

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\lim_{p\to 0}\frac{\sin p}{p}=1$$

*CONTOH 3* Cari $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 3x}{\tan 3x}$ .

**Penyelesaian**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 3x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\tan 3x}-\cos 3x\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3\cdot\tan 3x}-\lim_{x\to 0}\cos 3x$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 1-1=-\frac{2}{3}$$

*CONTOH 4* Cari $\lim_{t\to 0}\frac{\tan 2t}{\sin 2t-1}$ .

**Penyelesaian**

Di sini kita tidak perlu melakukan manipulasi lagi karena penyebutnya tidak sama dengan nol. Jadi,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tan 2t}{\sin 2t-1}=\frac{\tan 0}{\sin 0-1}=\frac{0}{0-1}=0\,.$$

## 3.4 Limit di Takhingga

Lambang takhingga (∞) bukanlah sebuah bilangan real. Lambang ini digunakan untuk menjelaskan perilaku fungsi ketika daerah asal atau daerah hasilnya di luar batas bilangan real. Sebagai contoh, fungsi

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

terdefinisi untuk $x \neq 0$. Jika $x$ positif semakin besar, $1/x$ semakin kecil. Jika $x$ terus-menerus diperbesar menuju takhingga, $1/x$ terus-menerus semakin kecil dan menuju nol. Kita katakan bahwa

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\,.$$

Hal yang sama terjadi ketika $x$ menuju negatif takhingga,

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0\,.$$

Berikut adalah contoh-contoh berkaitan dengan limit di takhingga.

*CONTOH 1* Cari $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}$ .

**Penyelesaian**

Untuk menyelesaikan limit di tak hingga, pembilang dan penyebut dibagi oleh $x$ dengan pangkat tertinggi.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{0}{0+1}=0\,.$$

*CONTOH 2* Cari $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{1+x^2}$ .

**Penyelesaian**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{2}{0+1}=2\,.$$

*CONTOH 3* Cari $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{p}{1-p}$.

**Penyelesaian**

$$\lim_{p\to-\infty}\frac{p}{1-p}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{1}{p}-1}=\frac{1}{0-1}=-1\,.$$

*CONTOH 4* Hitung $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-5})$.

**Penyelesaian**

Kalikan dan bagi bagian dalam kurung dengan sekawannya maka diperoleh

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-5})=\lim_{x\to\infty}\left\{(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-5})\frac{(\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-5})}{\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-5}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{(2x^2+3)-(2x^2-5)}{\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-5}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{8}{\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{2x^2-5}}\right\}$$

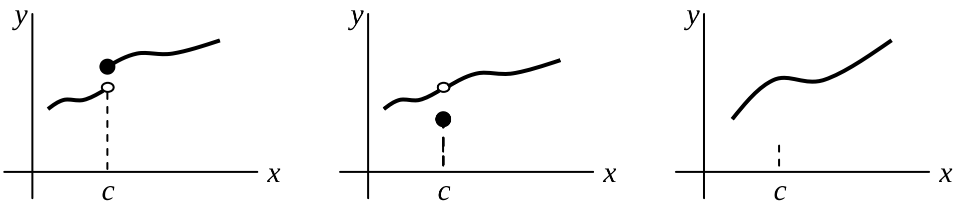
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\frac{8}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{5}{x^2}}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{0}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}\right\}$$

$$=0$$

## 3.5 Kekontinuan Fungsi

Sebuah fungsi dikatakan kontinu jika grafik fungsi tersebut mulus, tanpa ada lompatan dari satu nilai ke nilai lainnya. **Gambar 3.5** memperlihatkan tiga buah grafik: (a) dan (b) tidak kontinu di $x = c$, (c) kontinu di $x = c$.




$\lim_{x\to c} f(x)$ tidak ada (a) $\lim_{x\to c} f(x)\neq f(c)$ (b) $\lim_{x\to c} f(x)= f(c)$ (c)

**Gambar 3.5**

Untuk fungsi *f* yang terdefinisi pada interval buka yang mengandung *c* di dalamnya, fungsi tersebut kontinu di *x* = *c* jika

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x) = f(c)}$$

Untuk menguji kekontinuan fungsi, sesuai definisi di atas, diperlukan tiga kondisi yang harus dipenuhi sekaligus, yaitu:

(1) $f(c)$ ada (*c* berada pada daerah asal *f*)

(2) $\lim_{x\to c} f(x)$ ada (*f* memiliki limit di $x \to c$)

(3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (limit *f* sama dengan nilai *f* di x = c).

Jika salah satu dari kondisi di atas tidak dipenuhi, fungsi tersebut tidak kontinu di *x* = *c*.

*CONTOH 1* Periksa kekontinuan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} |x-2|, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

di *x* = 2.

**Penyelesaian**

Fungsi mutlak di atas dapat dipecah menjadi

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2, & x > 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}.$$

Limit *f*(*x*) di sekitar *x* = 2 sebagai berikut. Limit kiri {*f*(*x*) untuk *x* < 2}:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(2-x) = 0.$$

dan limit kanan { *f*(*x*) untuk *x* > 2}:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0.$$

Limit kiri sama dengan limit kanan maka

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} |x-2| = 0.$$

Selanjutnya, telah diketahui bahwa *f*(*x*) = 2 di *x* = 2 atau *f*(2) = 2. Karena

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0 \text{ dan } f(2) = 2,$$

jelas bahwa $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$. Jadi, *f*(*x*) *tidak kontinu* di *x* = 2.

*CONTOH 2* Diberikan sebuah fungsi sebagai berikut.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}.$$

Fungsi di atas tidak kontinu di $x = 1$. Berapakah $f(1)$ harus didefinisikan agar $f(x)$ kontinu di setiap titik? Tuliskan fungsi itu dengan memasukkan definisi $f(1)$ tersebut.

**Penyelesaian**

Dari syarat kekontinuan fungsi diperoleh

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x\to 1} f(x) \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, $f(1) = \frac{1}{2}$. Jadi, fungsi yang baru {sebut $g(x)$} adalah

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$