BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Sistem Bilangan Real

Terdapat beberapa sistem bilangan yaitu: bilangan asli, bilangan bulat, bilangan rasional, bilangan irrasional, dan bilangan real. Masing-masing bilangan itu sebagai berikut.

(1) *Bilangan asli* merupakan sistem bilangan paling sederhana, yaitu

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

(2) *Bilangan bulat* melibatkan negatif bilangan asli dan nol, yaitu

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

(3) *Bilangan rasional* melibatkan hasil bagi dua bilangan bulat, seperti

$$\frac{2}{3}, \frac{-1}{5}, \frac{11}{7}, \frac{23}{-3}, \frac{20}{2}, \text{dan } \frac{-15}{1}$$

Pembagian dengan nol, misalnya $\frac{6}{0}$ atau $\frac{-4}{0}$, tidak termasuk bilangan rasional karena tidak memiliki makna apapun. Oleh karena itu, pembagian dengan nol harus dihindari.

(4) *Bilangan irrasional* mencakup akar dari suatu bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai hasil bagi dua bilangan bulat, seperti

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \pi, \ldots$$

(5) *Bilangan real* mencakup semua jenis bilangan yang ada. Jika A menyatakan bilangan asli (bulat positif), B bilangan bulat, Q bilangan rasional, dan R bilangan real, maka

$$A \subseteq B \subseteq Q \subseteq R$$

Lambang $\subseteq$ dibaca *himpunan bagian dari*. Pernyataan $A \subseteq B$ berarti setiap unsur A juga merupakan unsur B.

Bilangan real memenuhi operasi penjumlahan dan perkalian. Pada operasi penjumlahan dan perkalian bilangan real berlaku sifat-sifat berikut. Misalnya, x dan y bilangan real maka berlaku:

(1) *Hukum-hukum komutatif*: $x + y = y + x$ dan $xy = yx$.

(2) *Hukum-hukum asosiatif*: $x + (y + z) = (x + y) + z$ dan $x(yz) = (xy)z$

(3) *Hukum distributif:* $x(y + z) = xy + xz$

(4) *Unsur-unsur identitas.* Ada dua bilangan berbeda 0 dan 1 yang memenuhi $x + 0 = x$ dan $x \cdot 1 = x$ untuk setiap bilangan real x.

(5) *Invers* (kebalikan). Setiap bilangan x memiliki *kebalikan penjumlahan*, $-x$, yang memenuhi $x + (-x) = 0$. Selain itu, setiap bilangan x, kecuali 0, memiliki *kebalikan perkalian*, x^{-1}, yang memenuhi $x \cdot x^{-1} = 1$.

Pengurangan dan pembagian didefinisikan sebagai

$$x - y = x + (-y)$$

dan

$$\frac{x}{y} = x \div y = x \cdot y^{-1}$$

dengan syarat $y \neq 0$. Pembagian dengan 0 tidak didefinisikan.

Bilangan real bukan nol dibedakan menjadi bilangan real positif dan bilangan negatif. Kenyataan ini memungkinkan kita untuk memperkenalkan bentuk hubungan *lebih kecil dari* atau *kurang dari* (<) dan *lebih besar dari* atau *lebih dari* (>). Hubungan ini masing-masing didefinisikan sebagai berikut.

(i) $x < y$ jika dan hanya jika $x - y$ negatif;

(ii) $x > y$ jika dan hanya jika $x - y$ positif.

Sebagai ilustrasi: 3 < 5 karena 3 – 5 = –2 dan –2 adalah bilangan negatif. Kemudian 3 > 2 karena 3 – 2 = 1 dan 1 adalah bilangan positif.

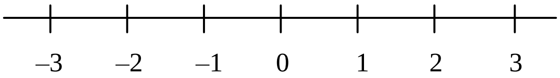
Selanjutnya, hubungan *kurang dari atau sama dengan* (≤) dan *lebih dari atau sama dengan* (≥) didefinisikan sebagai berikut.

(i) $x \leq y$ jika dan hanya jika $x - y$ negatif atau nol;

(ii) $x \geq y$ jika dan hanya jika $x - y$ positif atau nol.

Ungkapan yang mengandung >, <, ≥, dan ≤ disebut pertidaksamaan. Pertidaksamaan yang melibatkan > dan < disebut pertidaksamaan murni, sedangkan yang melibatkan ≥ dan ≤ disebut pertidaksamaan tidak murni.

Dari definisi di atas, $x > 0$ menyatakan bahwa x merupakan bilangan positif dan, sebaliknya, $x < 0$ menyatakan bahwa x merupakan bilangan negatif. Pada garis bilangan real (**Gambar 1.1)**, bilangan-bilangan positif berada di sebelah kanan titik 0 dan bilangan-bilangan negatif berada di sebelah kiri titik 0. Titik 0 disebut titik asal. Semakin ke kanan, bilangannya semakin besar. Sebaliknya, semakin ke kiri bilangannya semakin kecil.



Gambar 1.1 Garis bilangan real.

Sifat-sifat pertidaksamaan sebagai berikut.

(1) *Trikotomi*: Jika x dan y adalah bilangan, salah satu dari berikut ini akan dipenuhi: $x < y$ atau $x = y$ atau $x > y$.

(2) *Transitif* : Jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$.

(3) *Penjumlahan*: $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$

(4) *Perkalian*: Jika $z > 0$, $x < y \Leftrightarrow xz < yz$. Sebaliknya, jika $z < 0$, $x < y \Leftrightarrow xz > yz$.

SOAL-SOAL LATIHAN 1.1

Tunjukkan tahapan penyelesaian soal-soal berikut hingga ditemukan jawabannya.

1. $5 – 3(9 – 12) + 7$
2. $–4\ [3 – 2(7 – 5) + 7(14 – 3)]$
3. $\frac{6}{7} - \frac{4}{21}$
4. $3\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{8})$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{5}{2\sqrt{2}}$

Sederhanakan aljabar berikut.

6. $(3x – 2)(x + 5)$
7. $(2x + 6)^2$
8. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$
9. $\dfrac{t^2 - 4t - 21}{t + 3}$
10. $\dfrac{12}{p^2 + 2p} + \dfrac{4}{p} + \dfrac{2}{p + 2}$

Nyatakan apakah ungkapan berikut benar atau salah. Berikan alasannya.

11. $-3 < -7$
12. $-3 < -\dfrac{22}{7}$
13. $-1 > -17$
14. $-5 > -\sqrt{26}$
15. $-\frac{5}{7} < -\frac{44}{9}$

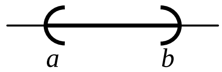
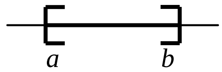
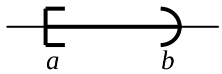
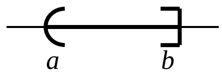
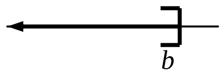
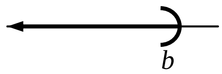
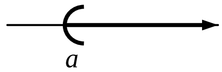
1.2 Pertidaksamaan

1.2.1 Selang

Suatu bilangan x yang berada di antara a dan b, yakni $a < x$ dan $x < b$, dapat dituliskan dalam pertidaksamaan bersambung sebagai berikut: $a < x < b$. Himpunan semua bilangan x yang memenuhi pertidaksamaan bersambung ini disebut selang atau interval.

Secara umum selang dibedakan menjadi selang terbuka, selang tertutup, dan kombinasi keduanya. Ungkapan $a < x < b$ menyatakan *selang terbuka* yang terdiri dari semua bilangan real antara a dan b, tidak termasuk titik ujung a dan b dan lambangkan oleh (a, b). Sementara itu, ungkapan $a \le x \le b$ menyatakan *selang tertutup* yang terdiri dari semua bilangan real antara a dan b, termasuk a dan b itu sendiri dan dilambangkan oleh $[a, b]$. **Tabel 1.1** mengindikasikan berbagai kemungkinan selang berikut lambangnya.

Tabel 1.1 Lambang himpunan penyelesaian, selang, dan gambarnya.

Lambang Himpunan	Lambang Selang	Gambar
$\{ x: a < x < b \}$	(a, b)	
$\{ x: a \le x \le b \}$	$[a, b]$	
$\{ x: a \le x < b \}$	$[a, b)$	
$\{ x: a < x \le b \}$	$(a, b]$	
$\{ x: x \le b \}$	$(-\infty, b]$	
$\{ x: x < b \}$	$(-\infty, b)$	
$\{ x: x \ge a \}$	$[a, \infty)$	
$\{ x: x > a \}$	(a, ∞)	
R	$(-\infty, \infty)$	

1.2.2 Memecahkan Pertidaksamaan

Memecahkan pertidaksamaan berarti mencari himpunan semua bilangan real yang membuat pertidaksamaan tersebut menjadi benar. Berbeda dengan persamaan, yang penyelesaiannya terdiri dari satu atau sejumlah bilangan terbatas, himpunan penyelesaian pertidaksamaan biasanya semua bilangan real dalam selang tertentu atau gabungan beberapa selang.

Metode yang dapat dilakukan untuk memecahkan pertidaksamaan tanpa mengubah himpunan penyelesaiannya berdasarkan pada kenyataan berikut:

(1) Setiap ruas dapat ditambahkan bilangan yang sama.

(2) Setiap ruas dapat dilkalikan dengan bilangan positif yang sama.

(3) Setiap ruas dapat dikalikan dengan bilangan negatif, tetapi arah tanda pertidaksamaan harus dibalik.

CONTOH 1 Cari himpunan penyelesaian dari $2x - 6 < 4x - 3$ dan gambarkan himpunan penyelesaiannya pada garis bilangan real.

Penyelesaian

$2x - 6 < 4x - 3$

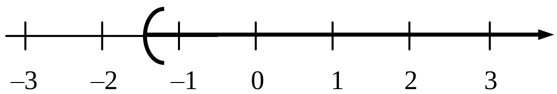
$2x < 4x + 3$ (setelah kedua ruas ditambah 6)

$-2x < 3$ (setelah kedua ruas ditambah $-4x$)

$x > -\dfrac{3}{2}$ (setelah kedua ruas dikalikan $-\frac{1}{2}$, tanda pertidaksamaan dibalik).

Jadi, himpunan penyelesaiannya sbb.:

$$\left(-\tfrac{3}{2}, \infty\right) = \left\{x : x > -\tfrac{3}{2}\right\}$$



CONTOH 2 Cari himpunan penyelesaian dari $-5 \le 2x + 6 < 4$.

Penyelesaian

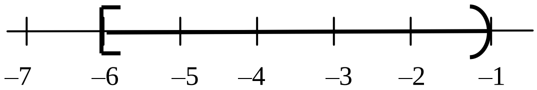
$-6 \le 2x + 6 < 4$

$-12 \le 2x < -2$ (setelah setiap ruas ditambah -6)

$-6 \le x < -1$ (setelah setiap ruas dikalikan ½)

Jadi, himpunan penyelesaiannya sebagai berikut:

$$[-6, -1) = \{x : -6 \le x < -1\}$$



CONTOH 3 Cari himpunan penyelesaian $x^2 - 2x < 8$.

Penyelesaian

$$x^2 - 2x < 8$$

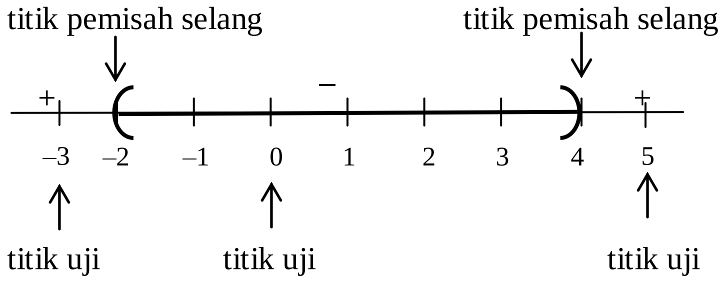
$$x^2 - 2x - 8 < 0 \qquad \text{(setelah ditambah –8)}$$

$$(x + 2)(x - 4) < 0 \qquad \text{(setelah difaktorkan)}$$

Ambil dulu $(x + 2)(x - 4) = 0$ sehingga diperoleh $x = -2$ dan $x = 4$. Titik $x = -2$ dan $x = 4$ disebut titik pemisah selang (*split point*). Titik ini membagi garis bilangan real menjadi tiga selang yaitu $(-\infty, -2)$, $(-2, 4)$, dan $(4, \infty)$, seperti diperlihatkan pada gambar. Pada masing-masing selang ini, $(x + 2)(x - 4)$ terdiri dari satu tanda, bisa selalu positif atau selalu negatif. Untuk mendapatkan tanda pada setiap selang, gunakan *titik uji* yang berada dalam selang tersebut. Perhatikan tabel berikut.

Selang	Titik Uji (x)	Nili dari $(x + 2)(x - 4)$	Tanda
$(-\infty, -2)$	-3	7	+
$(-2, 4)$	0	-8	–
$(4, \infty)$	5	7	+

Dari tabel di atas jelas bahwa himpunan penyelesaian dari $(x + 2)(x - 4) < 0$ adalah selang $(-2, 4)$.



CONTOH 4 Cari himpunan penyelesaian dari $x^2 - 2x > 8$.

Penyelesaian

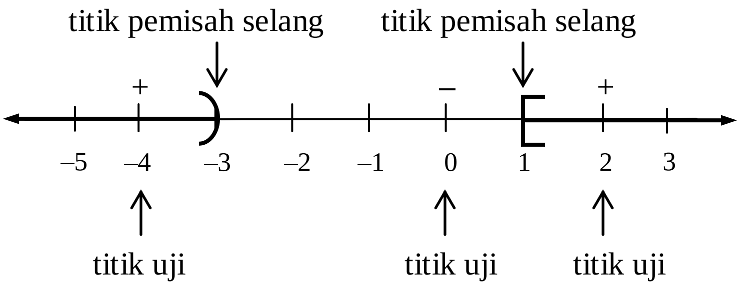
Contoh ini mirip dengan Contoh 3 tetapi tanda pertidaksamaannya dibalik menjadi lebih besar dari (>). Mengacu pada penyelesaian Contoh 3, himpunan penyelesaian $x^2 - 2x - 8 > 0$ adalah gabungan dari selang $(-\infty, -2)$ dan $(4, \infty)$ dan ditulis $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$. Tanda $\cup$ dibaca: *gabungan*.

CONTOH 5 Cari himpunan penyelesaian dari

$$\frac{x-1}{x+3} \geq 0 .$$

Penyelesaian

Titik pemisah selang untuk kasus ini adalah x = 1 dan x = –3 (lihat gambar). Perhatikan bahwa x = –3 harus dikecualikan karena akan menghasilkan pembagian dengan nol. Sementara itu, x = 1 termasuk penyelesaian. Dengan demikian, selangnya adalah (–∞,–3), (–3, 1], dan [1, ∞). Dengan memasukkan titik uji pada setiap selang, masing-masing –4, 0, dan 2, diperoleh bahwa tanda (x – 1)/(x + 3) *positif* atau nol pada selang (–∞,–3) dan [1, ∞), dan *negatif* pada selang (–3, 1]. Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah (–∞,–3) ∪ [1, ∞).



CONTOH 6 Cari himpunan penyelesaian dari $\dfrac{x^2+1}{x} \geq 2$

Penyelesaian

Dalam menyelesaikan pertidaksamaan di atas kita tidak boleh mengalikan kedua ruas dengan penyebut x sebab tidak diketahui apakah x positif atau negatif. Selain itu, mengalikan kedua ruas dengan penyebut x menyebabkan syarat penyebut tidak boleh sama dengan nol menjadi tidak terlihat. Penyelesaian yang tepat sebagai berikut.

$$\frac{x^2+1}{x} \geq 2$$

$$\frac{x^2+1}{x} - 2 \geq 0$$

$$\frac{x^2+1}{x} - \frac{2x}{x} \geq 0$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

Karena pembilangnya, yakni $(x-1)^2$, selalu positif, pertidaksamaan di atas akan dipenuhi jika penyebutnya positif, yakni $x > 0$. Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $(0, \infty)$.

SOAL-SOAL LATIHAN 1.2

Tunjukkan lambang selang berikut pada garis bilangan real.

1. $[-5, 2]$
2. $(-\infty, -1]$
3. $(1, 4]$
4. $(-1, 2)$
5. $[0, \infty)$

Tentukan semua nilai x yang memenuhi pertidaksamaan berikut. Nyatakan dalam notasi selang dan grafik.

6. $2x+6>4x-3$
7. $x^2<4x-3$
8. $\frac{1}{x} \geq 2x$
9. $\frac{x+4}{x-1} \leq 0$
10. $\frac{x-2}{x} < 3$
11. $(x+2)(x-1)(x-3)>0$
12. $x^3-5x^2-6x<0$
13. $x^4-2x^2 \geq 8$
14. $3x+7>2$ dan $2x-1<2$
15. $2x-7 \leq 1$ atau $2x+1>3$

1.3 Nilai Mutlak dan Bentuk Akar

1.3.1 Nilai Mutlak

Nilai mutlak dari bilangan real x, dilambangkan oleh $|x|$, didefinisikan sebagai

$\|x\| = x$	jika $x \geq 0$
$\|x\| = -x$	jika $x < 0$

Definisi di atas menyatakan bahwa $|x|$ selalu bernilai *taknegatif*. Sebagai contoh, $|4| = 4$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$, dan $|-x| = |x|$.

Nilai mutlak dapat dipahami sebagai sebuah jarak tak berarah. $|x|$ adalah jarak antara x dan titik asal (titik nol). Dengan pemahaman yang sama, $|x - a|$ adalah jarak antara x dan titik a.

Adapun *sifat-sifat nilai mutlak* sebagai berikut.

(1) $|ab| = |a||b|$

(2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

(3) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(4) $|a - b| \geq ||a| + |b||$

Memecahkan Pertidaksamaan yang Melibatkan Nilai Mutlak Pertidaksamaan yang melibatkan nilai mutlak memenuhi pernyataan berikut.

$$|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a$$

$$|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad x < -a \text{ dan } x > a$$

CONTOH 7 Cari himpunan penyelesaian dari $|x - 5| < 3$.

Penyelesaian

$$|x - 5| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x - 5 < 3$$

$$2 < x < 8 \qquad \text{(setelah kedua ruas ditambah 5)}$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $2 < x < 8$.

CONTOH 8 Cari himpunan penyelesaian dari $|2x - 7| \geq 1$.

Penyelesaian

$$|2x - 7| \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 7 \leq -1 \quad \text{atau} \quad 2x - 7 \geq 1$$

$$2x \leq 6 \quad \text{atau} \quad 2x \geq 8$$

$$x \leq 3 \quad \text{atau} \quad x \geq 4$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $(-\infty, 3] \cup [4, \infty)$.

CONTOH 9 Cari himpunan penyelesaian dari $\frac{|x|+2}{x} > 2$.

Penyelesaian

Memecahkan pertidaksamaan yang mengandung nilai mutlak seperti ini dilakukan membuka tanda mutlak sesuai dengan definisinya. Ingat bahwa $|x| = x$ untuk $x \geq 0$ dan $|x| = -x$ untuk $x < 0$.

- Untuk $x \geq 0$ maka $|x| = x$ sehingga pertidaksamaan di atas menjadi $\frac{x+2}{x} > 2$.

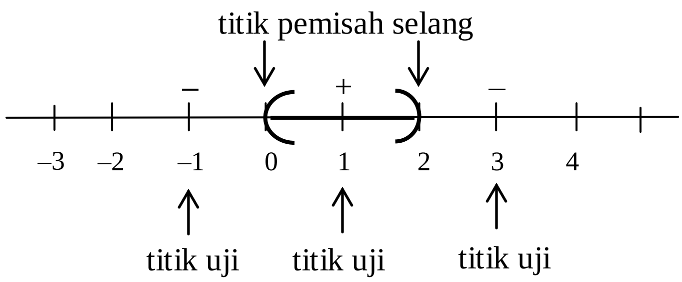
  Selanjutnya diperoleh

$$\frac{x+2}{x} - 2 > 0$$

$$\frac{x+2}{x} - \frac{2x}{x} > 0$$

$$\frac{2-x}{x} > 0$$

  Titik pemisah selangnya adalah $x = 0$ dan $x = 2$. Akan tetapi, $x = 0$ harus dikecualikan dari himpunan penyelesaian karena penyebut tidak boleh nol. Hasil uji selang (lihat gambar) diperoleh himpunan penyelesaiannya adalah (0, 2].



  Akan tetapi, ingat bahwa kita sedang bekerja untuk $x \geq 0$ atau $(0, \infty)$ maka himpunan penyelesaiannya adalah $(0, 2) \cap (0, \infty) = (0, 2)$.

- Untuk $x < 0$ maka $|x| = -x$ sehingga persamaan di atas menjadi $\frac{-x+2}{x} > 2$.

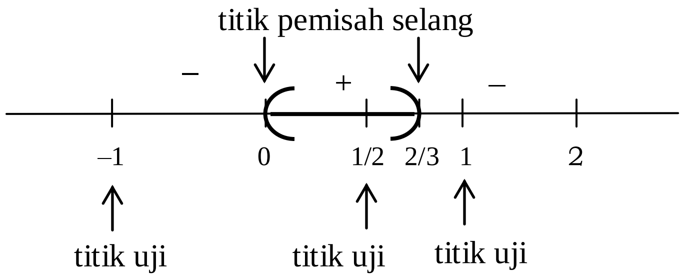
  Selanjutnya diperoleh

$$\frac{-x+2}{x} - 2 > 0$$

$$\frac{-x+2}{x} - \frac{2x}{x} > 0$$

$$\frac{2-3x}{x} > 0$$

Titik pemisah selangnya adalah $x = 0$ dan $x = 2/3$. Akan tetapi, $x = 0$ harus dikecualikan dari himpunan penyelesaian karena penyebut tidak boleh nol. Hasil uji selang (lihat gambar) diperoleh himpunan penyelesaiannya adalah (0, 2/3].



Akan tetapi, ingat bahwa kita sedang bekerja untuk $x < 0$ atau $(-\infty, 0)$ maka himpunan penyelesaiannya adalah $(0, 2/3) \cap (-\infty, 0) = \{\ \}$ atau tidak ada.

Jadi, himpunan penyelesaian dari $\dfrac{|x|+2}{x} > 2$ adalah (0, 2).

1.3.2 Akar dari Kuadrat

Setiap bilangan positif memiliki dua akar kuadrat. Sebagai contoh, dua akar kuadrat dari 16 adalah 4 dan –4 dan kadang-kadang dinyatakan sebagai ±4. Untuk $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ disebut akar kuadrat taknegatif dari a. Jadi, $\sqrt{4} = 2$ dan $\sqrt{225} = 15$. Penulisan $\sqrt{9} = \pm 3$ adalah tidak benar karena $\sqrt{9}$ berarti akar kuadrat taknegatif dari 9, yakni 3. Bilangan 3 memiliki dua akar kuadrat, yang ditulis $\pm\sqrt{3}$, tetapi $\sqrt{3}$ menyatakan bilangan real positif.

Secara umum, bentuk akar kuadrat definisikan sebagai berikut:

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Ingat kembali bahwa penyelesaian persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ diberikan oleh **rumus abc** sebagai berikut.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bilangan $D = b^2 - 4ac$ disebut **diskriminan** dari persamaan kuadrat. Persamaan ini memiliki dua penyelesaian real jika $D > 0$, satu penyelesaian real jika $D = 0$, dan tak ada penyelesaian real (imajiner) jika $D < 0$.

CONTOH 10 Cari himpunan penyelesaian dari $x^2 - x - 3 \le 0$.

Penyelesaian

Dua penyelesaian dari $x^2 - x - 3 = 0$ yaitu

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

dan

$$x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\,.$$

Titik pemisah selang $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$ dan $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$ membagi tiga selang yaitu $(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}\,]$, $[\,\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}\,,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\,]$, dan $[\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\,, \infty)$. Ambil titik uji –2, 0, dan 4 maka diperoleh simpulan bahwa himpunan penyelesaian dari $x^2 - x - 3 \le 0$ adalah $[\,\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}\,,\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\,]$.

1.3.3 Kuadrat Nilai Mutlak

Kuadrat dari nilai mutlak memenuhi

$$|x|^2 = x^2$$

Penguadratan kedua ruas pada pertidaksamaan dapat menyebabkan pertidaksamaan itu menjadi salah. Sebagai contoh, $-2 > -5$ akan tetapi $(-2)^2 < (-5)^2$. Di lain pihak, $2 < 5$ dan $2^2 < 5^2$. Dengan demikian, penguadratan kedua ruas pada pertidaksamaan akan tetap benar jika bilangan pada kedua ruas itu taknegatif. Berdasarkan kenyataan ini, pernyataan berikut adalah benar, yakni

$$|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2.$$

CONTOH 11 Cari himpunan penyelesaian dari $|x - 1| < 2|x - 3|$.

Penyelesaian

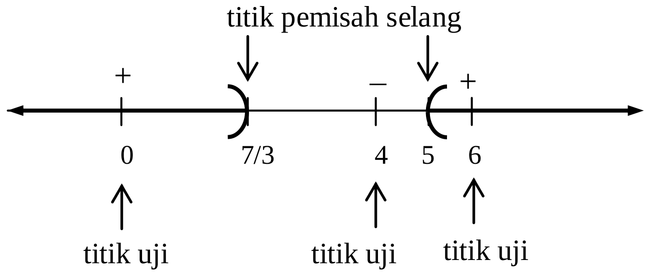
Pemecahan pertidaksamaan di atas dapat dilakukan dengan menguadratkan kedua ruasnya sebagai berikut.

$$|x-1| < 2|x-3| \quad \Leftrightarrow \quad |x-1|^2 < 2^2\,|x-3|^2$$

$$x^2 - 2x + 1 < 4(x^2 - 6x + 9)$$

$$x^2 - 2x + 1 < 4x^2 - 24x + 36$$
$$-3x + 22x - 35 < 0$$
$$3x^2 - 22x + 35 > 0$$
$$(3x - 7)(x - 5) > 0$$

Titik pemisah selangnya adalah x = 7/3 dan x = 5. Uji selangnya sebagai berikut.



Jadi, himpunan penyelesaian dari $|x - 1| < 2|x - 3|$ adalah $(-\infty, 7/3) \cup (5, \infty)$.

SOAL-SOAL LATIHAN 1.3

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut.

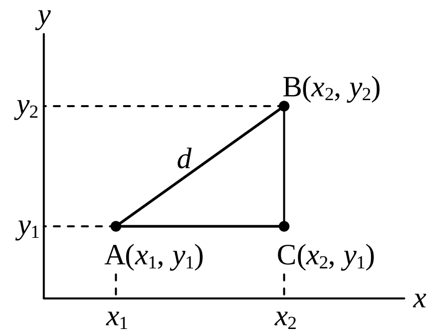
1. $|x-1| < 2$
2. $\left|2 + \frac{5}{x}\right| > 1$
3. $|4x - 5 | \leq 10|$
4. $| x-1| < 2 | x-2 |$
5. $| x-1| < 2(x-2)$
6. $x - 1 \geq \frac{2}{|x|}$
7. $x \geq \frac{-2}{|x-1|}$
8. $\frac{3}{x-2} \leq x$
9. $x^2 - 3x - 4 \geq 0$
10. $14x^2 + 11x - 15 \leq 0$

1.4 Jarak Antara Dua Titik dan Persamaan Lingkaran

1.4.1 Jarak Antara Dua Titik

Tinjau tiga buah titik A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), dan C(x_2, y_1) seperti diperlihatkan pada **Gambar 1.2**. Garis hubung ketiga titik membentuk segitiga siku-siku dengan siku-siku di C. Jarak AB dapat ditentukan menggunakan dalil Phytagoras sebagai berikut.

$$\boxed{d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$



Gambar 1.2 Menentukan jarak antara dua titik.

CONTOH 12 Tentukan jarak antara (a) A(2, –5) dan B(−4, 3); (b) C($\sqrt{2}, -\sqrt{3}$) dan D($2\sqrt{2}, 4\sqrt{3}$).

Penyelesaian

(a) $$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-4-2)^2 + (3-(-5))^2}$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + 8^2}$$

$$= 10$$

(b) $$d = |\overline{CD}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 + (-\sqrt{3} - 4\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-5\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{79}$$

1.4.2 Persamaan Lingkaran

Lingkaran adalah himpunan titik yang berjarak sama ke titik acuan tetap. Titik acuan tetap ini disebut pusat lingkaran.

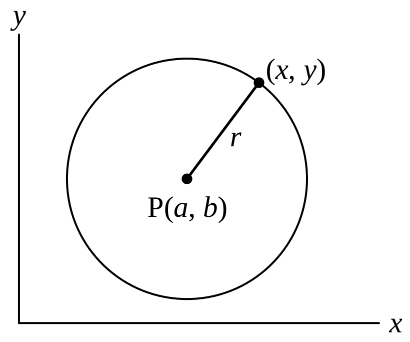
Sekarang tinjau sebuah lingkaran berjari-jari r dan berpusat di P(a,b) seperti diperlihatkan pada **Gambar 1.3** . Jarak titik (x, y) pada lingkaran ke pusat lingkaran adalah

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Dengan menguadratkan kedua ruas dan mengubah susunan persamaan di atas diperoleh

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

Persamaan di atas disebut persamaan lingkaran baku berjari-jari r dengan pusat di (a, b).



Gambar 1.3 Lingkaran berpusat di (a, b) dan berjari-jari r.

Jika persamaan lingkaran baku kita uraikan, diperoleh

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$$

$$x^2+y^2+(-2a)x+(-2b)y+(a^2+b^2-r^2)=0$$

Misalkan $A = -2a$, $B = -2b$, dan $C = a^2 + b^2 - r^2$ maka persamaan di atas dapat ditulis

$$\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$$

Persamaan ini disebut persamaan lingkaran umum. Pusat lingkaran pada persamaan di atas adalah $P(a, b)$ dengan

$$\boxed{a=-\frac{A}{2} \text{ dan } b=-\frac{B}{2}}$$

dan jari-jarinya adalah

$$\boxed{r=\sqrt{a^2+b^2-C}\ .}$$

CONTOH 13 Tentukan persamaan lingkaran berjari-jari 5 dan berpusat di (2, −3).

Penyelesaian

Diketahui r = 5, a = 2, dan b = –3 maka

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$(x-2)^2+(y-(-3))^2=5^2$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25$$

CONTOH 14 Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang dinyatakan oleh persamaan $x^2+y^2-2x+6y+6=0$.

Penyelesaian

Bandingkan $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ dengan $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ maka diperoleh A = –2, B = 6, dan C = 6. Selanjutnya diperoleh

$$a=-\frac{A}{2}=-\frac{-2}{2}=1$$

$$b=-\frac{B}{2}=-\frac{6}{2}=-3$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2-C}=\sqrt{1^2+(-3)^2-6}=2$$

Jadi, pusat lingkaran tersebut adalah (1, –3) dengan jari-jari 2 satuan.

SOAL-SOAL LATIHAN 1.4

Gambarkan titik-titik berikut dan tentukan jaraknya.

1. A(3, 2) dan B(–1, 5)
2. C(1, 3) dan D(–2, 4)
3. E(–3, –2) dan F(4, 5)

Tentukan persamaan lingkaran yang pusat dan jari-jarinya berturut-turut sebagai berikut.

4. (–2, 3) dan 2
5. (0, 0) dan 5

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang memenuhi persamaan berikut.

6. $(x-2)^2+(y+1)^2=16$
7. $x^2+y^2+2x-6y=0$
8. $4x^2+4y^2+16x+6y+15=0$

Tentukan jarak antarpusat dua lingkaran berikut.

9. $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ dan $(x+3)^2+(y-4)^2=25$
10. $x^2+y^2-12x+35=0$ dan $x^2+y^2-10x+10y=0$

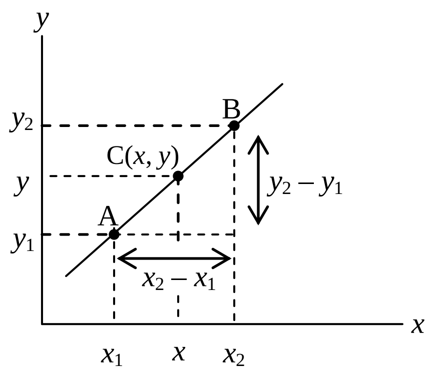
1.5 Garis Lurus

1.5.1 Kemiringan Garis atau Gradien

Tinjau sebuah garis g seperti diperlihatkan pada **Gambar 1.5**. Misalnya titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ berada pada garis tersebut. Gradien garis g didefinisikan sebagai berikut.

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Persamaan di atas tidak berlaku untuk $x_1 = x_2$ (garis vertikal). Garis vertikal tidak memiliki gradien.

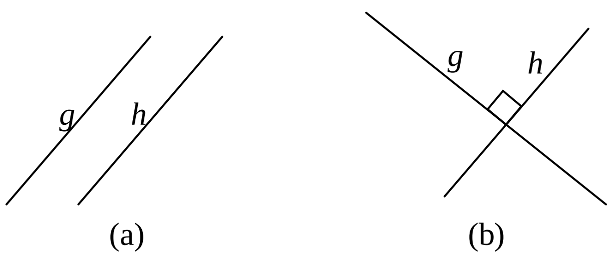


Gambar 1.5 Gradien garis takvertikal.

1.5.2 Garis-garis Sejajar dan Tegak lurus

Tinjau dua garis sejajar *g* dan garis *h* seperti pada **Gambar 1.6(a)**. Dari gambar tersebut jelas bahwa garis *g* dan garis *h* memiliki gradien sama. Dengan demikian, dua buah garis dikatakan sejajar jika keduanya memiliki gradien yang sama, yakni

$$\boxed{m_1 = m_2}$$



Gambar 1.6 (a) Dua garis sejajar dan (b) dua garis saling tegak lurus.

Pada **Gambar 1.6(b)**, garis *g* dan garis *h* saling tegak lurus jika memenuhi syarat

$$\boxed{m_1 \times m_2 = -1.}$$

Dengan kata lain, dua buah garis dikatakan saling tegak lurus jika dan hanya jika perkalian kedua gradiennya sama dengan negatif satu.

1.5.3 Persamaan Garis Lurus

Tinjau kembali **Gambar 1.5**. Jika C(x, y) adalah sebarang titik pada garis yang melalui AB, gradien garis tersebut juga dapat dinyatakan oleh

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Dari persamaan di atas diperoleh

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{atau} \quad y = m(x - x_1) + y_1}$$

Persamaan ini merupakan persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_2) dengan gradien m dan disebut bentuk kemiringan titik dari persamaan sebuah garis.

Jika garis dengan gradien m yang memotong sumbu-y di titik (0, c), persamaan garisnya menjadi

$$\boxed{y = mx + c}$$

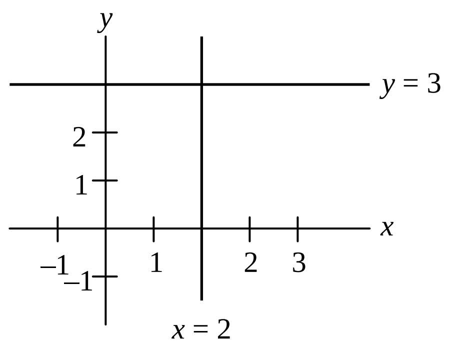
Persamaan terakhir ini disebut bentuk kemiringan perpotongan dari sebuah garis.

Persamaan garis secara umum dapat dinyatakan oleh

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

A dan B tak nol bersamaan. Persamaan ini disebut *persamaan linear umum*.

Persamaan Garis Vertikal dan Horisontal Garis vertikal melalui titik (a, b) memiliki persamaan $x = a$ karena setiap koordinat-x pada garis memiliki nilai a. Serupa dengan itu, garis lurus yang melalui (a, b) memiliki persamaan $y = b$.



Gambar 1.7 Garis $x = 2$ dan $y = 3$

CONTOH 13 Tentukan gradien garis yang melalui (−2,5) dan (4,1).

Penyelesaian

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{4-(-2)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

CONTOH 14 (a) Carilah persamaan garis yang melalui (3, 4) yang sejajar dengan garis $3x - 5y - 6 = 0$. (b) Tentukan pula persamaan garis yang melalui (−1,2) yang tegak lurus persamaan garis tadi.

Penyelesaian

Garis $3x - 5y - 6 = 0$ ditulis menjadi $y = \frac{3}{5}x - \frac{6}{5}$.

Dari sini jelas bahwa gradien garisnya $m_1 = \frac{3}{5}$.

(a) Karena sejajar, gradien garis yang melalui (3, 4) adalah $m_2 = m_1 = \frac{3}{5}$ sehingga persamaan garisnya

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{3}{5}(x-3) + 4$$

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{11}{5}$$

Jadi, persamaan garis melalui (3, 4) yang sejajar garis $3x-5y-6=0$ adalah

$$y=\frac{3}{5}x+\frac{11}{5}.$$

(b) Karena tegak lurus, garis yang melalui (–1, 2) memiliki gradien

$$m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{3/5}=-\frac{5}{3}$$

sehingga persamaan garisnya

$$y=m(x-x_1)+y_1$$

$$y=-\frac{5}{3}(x-(-1))+2$$

$$y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$$

Jadi, persamaan garis melalui (–1, 2) yang tegak lurus garis $3x-5y-6=0$ adalah

$$y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$$

SOAL-SOAL LATIHAN 1.5

Tentukan gradien garis yang melalui titik-titik berikut.

1. (1, 2) dan (4, –3)
2. (–2, 1) dan (3, 0)

Tentukan persamaan garis dengan kondisi berikut. Nyatakan dalam bentuk $Ax+By+C=0$.

3. Gradien 2 melalui (–2, 4)
4. Gradien $-\frac{2}{3}$ melalui (0, 5)
5. Melalui (0, 2) dan (–1, 4)
6. Melalui (–2, 1) dan (3, 3)

Tentukan persamaan garis yang melalui (–1, 2) dan

7. sejajar garis $y=2x-3$
8. sejajar garis $2x-3y+5=0$
9. tegak lurus $y=-3x+5$
10. tegak lurus $x+2y-6=0$
