BAB I
GELOMBANG ELEKTROMAGNETIK
PADA MEDIUM UDARA/RUANG BEBAS

A. Terjadinya Gelombang Elektromagnetik

Gelombang elektromagnetik adalah gelombang yang terjadi akibat perubahan medan magnet dan perubahan medan listrik terhadap waktu yang menjalar kesegala arah. Hal ini terjadi akibat adanya perubahan suatu medan baik listrik maupun magnet terhadap waktu.

Untuk menjelaskan proses terjadinya kita amati hukukm-hukum Maxwel untuk E dan H. misalnya pada medium hampa/vakum sebagai berikut :

Bentuk point

1. $\nabla \cdot E = 0$ ....(1.1)

2. $\nabla \cdot H = 0$ ....(1.2)

3. $\nabla \times E = -\mu_0 \dfrac{\partial H}{\partial t}$ ....(1.3)

4. $\nabla \times H = \varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t}$ ....(1.4)

Sekarang Marilah kita periksa apakah gerak gelombang dapat kita peroleh dari keempat persmaan tersebut. Makna fisis dari persamaan tersebut dari persamaan menyatakan bahwa jika E (medan listrik) berubah terhadap waktu pada suatu titik maka H (medan magnet) mempunyai curl pada titik tersebut dan karenanya dapat dianggap membentuk sosok kecil yang tertutup yang bertautan pada perubahan medan E. Demikian pula jika E berubah terhadap waktu maka H juga terhadap waktu walaupun cara berubahnya belum tentu sama.

Hal yang sama terjadi pada persamaan (1.3) jika H berubah terhadap waktu, E juga berubah terhadap waktu.

Kedua persamaan (1.3) dan (1.4) mempunyai konsekuensi jika salah satu peubahan medan terhadap waktu baik E maupun H maka akan terjadi perambatan gelombang EM.

Secara sistematis :

Gunakan identitas vektor

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.5)$$

Terapkan (1.5) pada persamaan Maxwell

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times E)$$

$$\nabla(\nabla \cdot H) - \nabla^2 H = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}\right)$$

$$0 - \nabla^2 H = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 H - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.6)$$

Demikianjuga:

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times H) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.7)$$

Jika kita bandingkan perbandingan gelombang secara umum :

$$\nabla^2 F - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.8)$$

menyatakan bahwa gelombang F menjalar dengan kecepatan V kesegala arah, dengan d^2 adalah operator Laplacian.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ (Kartesian) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.9)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ (Silinder) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.10)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r^2}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \ (Bola) \ldots\ldots\ldots (1.11)$$

Untuk kasus khusus misalnya gelombang menjalar kesatu arah misalnya pada sumbu z, maka persamaan (1.7) menjadi :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \ldots\ldots (1.12)$$

yang analog dengan persamaan (1.8) yang menjalar kearah sumbu z, yaitu :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \ldots\ldots (1.13)$$

Dengan *v* adalah kecepatan menjalar gelombang.
Jika gelombang merambat dalam vakum, dengan membandingkan persamaan (1.12) dengan (1.13) diperoleh :

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0\varepsilon_0 \quad \ldots\ldots (1.14)$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}} = 3\cdot 10^8\ (m/s) \quad \ldots\ldots (1.15)$$

Nampak bahwa gelombang EM divakum mempunyai kecepatan v = 3 x 10^8 ms^{-1}. yang mana sama dengan kecepatan cahaya. Kita tahu cahaya adalah salah satu contoh gelombang.

B. Solousi Persamaan Gelombang Datar Serba Pada Medium Udara

Tinjau kembali persamaan (1.12) yaitu gelombang EM yang menjalar pada arah sumbu-z.

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (1.16)$$

Medan E harganya berubah terhadap posisi (dalam hal ini z) dan terhadap waktu t. Atau dikatakan bahwa E adalah fungsi 2 (dua) variabel : E (z,t). Dengan menggunakan pemisahan variabel, maka dapat dituliskan :

$$E(z,t) = Z(z)T(t) \quad (1.17)$$

Artinya E merupakan perkalian antara 2 (dua) fungsi yaitu fungsi posisi dan fungsi waktu. Dengan demikian persamaan (1.16) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E(z,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}(z,t) = 0 \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(Z(z)T(t)\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(Z(z)T(t)\right) = 0 \quad (1.19)$$

$$T(t)\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z) - Z(z)\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t) = 0 \quad (1.20)$$

Kalikan persamaan (1.20) dengan $\frac{1}{Z(z)T(t)}$, sehingga :

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} - \frac{1}{T(t)}\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.21)$$

Persamaan (1.21) Mengandung 2 (dua) suku yang masing-masing mengandung satu variabel misalnya suku pertama adalah :

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -k^2 \quad (1.22)$$

dan suku keduanya adalah :

$$\frac{1}{T(t)}\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -k^2 \quad \ldots\ldots (1.23)$$

Dari persamaan (1.22) dapat dituliskan sebagai :

$$\frac{\partial Z(z)}{\partial z^2} = -k^2 Z(z) \quad \ldots\ldots (1.24)$$

Salah satu solusi persamaan diferensial orde-2 pada (1.24) adalah :

$$Z(z) = Ae^{\pm jkz} \quad \ldots\ldots (1.25)$$

Dan dengan memisalkan $kv = \omega \ldots\ldots (1.26)$

Maka persamaan (1.23) dapat ditulis sebagai :

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -k^2 v^2 T(t)$$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 T(t) \quad \ldots\ldots (1.27)$$

Salah satu solusi persamaan differensial orde-2 pada (1.27) adalah :

$$T(t) = Be^{\pm jwt} \quad \ldots\ldots (1.28)$$

Dengan memasukkan persamaan (1.25) dan (1.28) kepersamaan (1.17) maka :

$$E(z,t) = ABe^{j(\omega t \pm kz)} \quad \ldots\ldots (1.29)$$

Karena A dan B adalah suatu konstanta, maka persamaan (1.29) dapat ditulis sbb :

$$E(z,t) = E_0 e^{j(\omega t \pm kz)} \quad \ldots\ldots (1.30)$$

Dimana :

E_0 = Amplitudo gelombang datar pada t = 0 dan z = 0

k = Bilangan gelombang

$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \lambda =$ panjang gelombang (m)

ω = frekuensi sudut anguler (rad/s)

= 2πf

Persamaan (1.30) adalah solusi untuk gelombang EM datar serba sama (monokromatik) yang menjalar pada salah satu arah (*dalam hal ini arah sumbu-z*) dalam medium udara atau vakum. Persamaan (1.30) memiliki 2 (dua) kemungkinan, yaitu :

$$E(z,t) = E_0 e^{j(\omega t + kz)} \qquad (1.31)$$

Artinya gelombang monkromatik merambat kearah sumbu –z negatif.

$$E(z,t) = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \qquad (1.32)$$

Artinya gelombang monokromatik merambat kearah sumbu-z positif.

Ciri-ciri gelombang datar monokromatik :

1. Muka gelombang berupa bidang datar.
2. Tranveralitas : E $\perp$ H $\perp$ k
3. E dan H sefasa.

Persamaan (1.30) dapat diuraikan menjadi :

$$E(z,t) = E_0 \left[\cos(\omega t \pm kz) + j\sin(\omega t \pm kz)\right] \qquad (1.33)$$

bentuk lain dari pers. (1.30) adalah :

$$E(z,t) = E_0 \cos(\omega t \pm kz) \qquad (1.34)$$

Dan

$$E(z,t) = E_0 \sin(\omega t \pm kz) \qquad (1.35)$$

Arah getar dari medan magnet untuk gelombang yang menjalar pada sumbu z kita plih misalnya kearah sumbu x. Maka penulisan solusi gelombang (1.30) menjadi

$$E(z,t) = ABe^{j(\omega t \pm kz)} \hat{a}_x \qquad (1.36)$$

Sedang persamaan (1.34) menjadi :

$$E(z,t) = E_0 \cos(\omega t \pm kz) \hat{a}_x \qquad (1.37)$$

Contoh

1. Intensitas medan listrik suatu gelombang datar serba sama (monokromatik) diudara adalah 200 V/m dalam arah $\hat{a}_y$. Gelombang tersebut merambat dalam arah $\hat{a}_z$ dengan frekuensi anguler $2\text{x}10^9$ rad/s
   a. Tuliskan bentuk persamaan gelombang dalam bentuk sinus
   b. Tentukan panjang gelombang λ
   c. Tentukan frekuensi f
   d. Tentukan periode T

Penyelesaian :

$$a.\quad E_0 \sin(\omega t \pm kz)\,\hat{a}_y \;(V/m)$$

$$\text{dimana } E_0 = 200 \;(V/m)$$

$$\text{dan } k = \frac{\omega}{v} = \frac{2x10^9}{3x10^8} = 6{,}67 \;(rad/m)$$

$$E(z,t) = 200 \sin(2x10^9 t \pm 6{,}67\, z)\,\hat{a}_y \;(V/m)$$

$$b.\quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\cdot 3{,}14}{6{,}67} = 0{,}914\ m$$

$$c.\quad \omega = 2\pi f$$

$$2\cdot 10^9 = 2\cdot 3{,}14\cdot f$$

$$f = \frac{2\cdot 10^9}{6{,}28} = 318{,}47\ MHz$$

$$d.\quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{318{,}47\cdot 10^6}$$

$$T = 3{,}14\cdot 10^{-9}\ s$$

Impedansi Instrinsic Dalam Udara / Vakum

Impedensi instrinsic gelombang EM didefinisikan sebagai perbandingan antara intensitas medan listrik E terhadap intensitas medan magnet H. Impedensi intrinsic untuk medium udara ditulis sebagai :

$$\eta_0 = \frac{E}{H} \qquad (1.38)$$

Misal gelombang medan listrik yang merambat dalam arah z dengan arah getar $\hat{a}_y$

$$E(z,t) = E_0(\omega t - kz)\,\hat{a}_y \qquad (1.39)$$

Sedang H(z,t) diperoleh melalui persamaan Maxwell (1.3) yaitu :

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (1.40)$$

Atau dalam bentuk matrik :

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_\chi & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \chi} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_0 \sin(\omega t - kz) & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.41)$$

sehingga :

$$-\hat{a}_\chi \frac{\partial}{\partial z}\left(E_0 \sin(\omega t - kz)\right) = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\hat{a}_\chi \frac{\partial}{\partial z}\left(-k\, E_0 \cos(\omega t - kz)\right) = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\hat{a}_\chi \left(-k\, E_0 \cos(\omega t - kz)\right) = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\hat{a}_\chi \left(-k\, E_0 \cos(\omega t - kz)\right)/\mu_0$$

$$H(z,t) = -\hat{a}_\chi \int \left(-k\, E_0 \cos(\omega t - kz)\right) dt$$

$$H(z,t) = \frac{\left(-k\, E_0 \sin(\omega t - kz)\right)}{\mu_0} \hat{a}_\chi \qquad (1.42)$$

Dengan demikian :

$$\eta_0 = \left|\frac{E}{H}\right| = \left|\frac{E_0 \sin(\omega t - kz)}{-k \sin(\omega t - kz)}\right| = \frac{\mu_0 \omega}{k} \qquad (1.43)$$

$$\eta_0 = \mu_0 \cdot v = \mu_0 \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} \qquad (1.44)$$

Jika $\mu_0 = 4\pi x 10^{-7}$ (MKS)

$\varepsilon_0 = (1/36\pi) x 10^{-9}$ (MKS)

maka,

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}}}$$

$$= \sqrt{144\pi^2 \cdot 10^2}$$

$$= 120\pi \qquad (1.45)$$

$$= 377\ \Omega \ (untuk\ udara\ /\ vakum)$$

IKTHISAR

Gelombang EM datar monokromatis satu dimensi di dalam mediuam udara/vakum.

1. Persamaan gelombang Elektro Magnetik datar monokromatik yang menjalar sepanjang arah-z didalam medium udara/vakum :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.46)$$

atau

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.47)$$

analog dengan

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.48)$$

solusi persamaan

$$E(z,t) = E_0 \sin(\omega t - kz) \qquad (1.49)$$

dimana :

E_0 = amplitudo gelombang datar pada t = 0 dan z = 0

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ = bilangan gelombang

λ = panjang gelombang (m)

$\omega = 2\pi f$ = frekuensi sudut anguler (rad/s)

$\omega = kv$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \lambda f \qquad (1.50)$$

$$\eta_0 = \frac{E}{H}$$

$$H(z,t) = \frac{E_0 \sin(\omega t - kz)}{\eta_0} \qquad (1.51)$$

Contoh :

1. Dalam ruang bebas $E_{(z,t)} = 10^3 \sin(\omega t-kz)\hat{a}_y$ V/m, tentukan $H_{(z,t)}$ d5an $E_{(z,t)}$?

Jawab :

$$H(z,t) = E(z,t) = \frac{10^3 \sin(\omega t - kz)}{\eta_0}\hat{a}_y$$

Untuk gelombang EM yang menjalar pada satu dimensi dari Hukum Maxwell, diperoleh bahwa :

$E_{(z,t)} \perp H_{(z,t)}$

Maka :

$$H(z,t) = E(z,t) = \frac{10^3 \sin(\omega t - kz)}{377}\hat{a}_y \left(A/m\right)$$

2. Tunjukan bagi gelombang datar (faktor waktunya dihilangkan)

$$H = H_0 e^{\pm\gamma z} a_H$$

Dimana a_H adalah vektor satuan yang tetap, a_H . a_H = 0

Dalam vektor-vektor satuan kartesian :

$$a_H = (a_H \cdot a_x)a_x + (a_H \cdot a_y)a_y + (a_H \cdot a_z)a_z$$

Sehingga :

$$H = H_0 e^{\pm\gamma z}(a_H \cdot a_x)a_x + H_0 e^{\pm\gamma z}(a_H \cdot a_y)a_y + H_0 e^{\pm\gamma z}(a_H \cdot a_z)a_z$$

Persamaan Maxwell ∇ . H = 0

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(H_0 e^{\pm\gamma z}(a_H \cdot a_x)\right) = 0 \;\; atau \;\; \pm\gamma\, H_0 (a_H \cdot a_x) = 0$$

yang benar jika $a_H \cdot a_z = 0$

3. Dalam ruangan bebeas,E(z,t) = 10^3 sin (ωt-kz)a_Y (V/m). Carilah H (z,t) ?

Pemeriksaan fasanya, ωt – kz, menunjukan arah perambatan adalah +z, karena E x H juga harus dalam arah +z, H mesti dalam arah –ax. Maka :

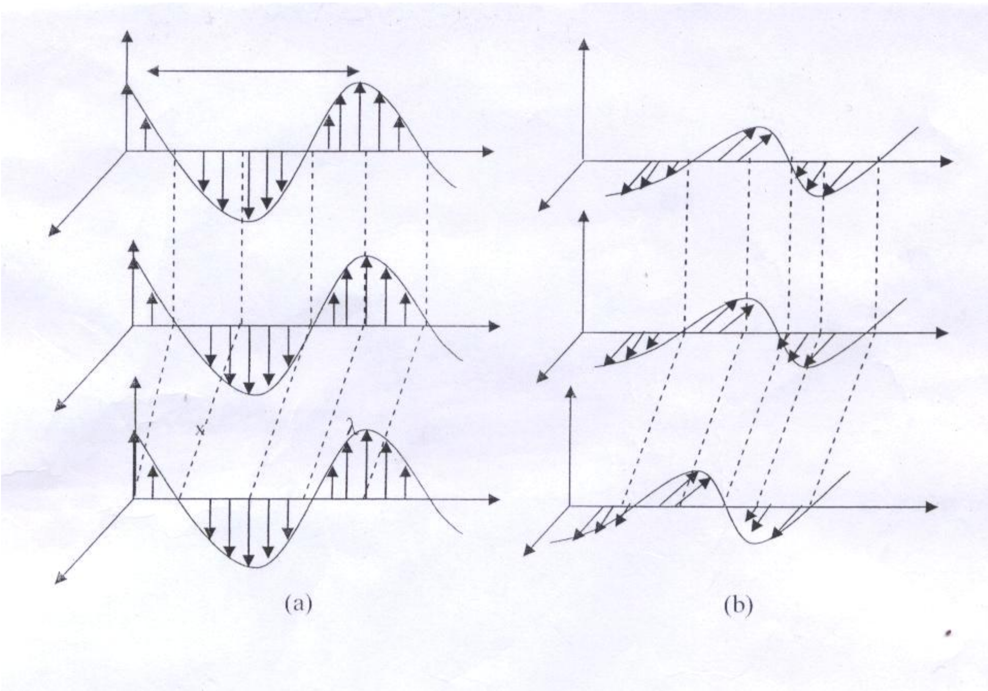
$$\frac{E_y}{-H_x} = \eta_0 = 120\pi\ \Omega$$

$$H(z,t) = \frac{10^3 \sin(\omega t - kz)}{120\pi}\hat{a}_x \left(A/m\right)$$

Pada gambar a dan b intensitas medan listrik dapat diperlihatkan untuk T = 0, dan harga medan sesaatnya digambarkan pada tiga garis yaitu sumbu z, dan sembarang garis yang sejajar sumbu z pada x = 0 dan y = 0.

Secara fisis, gelombang serba sama tidak terdapat, karena gelombang ini meluas ke tak terhingga sekurang-kurangnya dalam dua dimensi dan menyatakan energinya tak berhingga. Namun demikian, medan yang jauh dari suatu negara untuk pemancar pada pokok merupakan gelombang datar jika ditinjau untuk suatu daerah terbatas. Gelombang yang sampai ke antena penerima di Clevand dari Chicago dapat dianalisis sebagai gelombang datar serba sama dalam daerah dekat antena.

Walaupun yang telah kita tinjau ialah gelombang yang berubah terhadap ruang dan waktu secara sinusoida, suatu kombinasi yang cocok dari pemecahan persamaan gelombang dapat kita bentuk untuk menyatakan bentuk gelombang yang dikehendaki. Penjumlahan harmonik yang banyak dan tak tetrhingga melalui deret fourier dapat menyatakan gelombang periodik berbentuk persegi atau segi tiga terhadap ruang dan waktu.



BAB II

GELOMBANG ELEKTRO MAGNETIK
PADA MEDIUM UMUM

Yang dimaksud dengan medium adalah dielektrik sempurna, bukan konduktor , bukan pula/vakum merupakan dielektrik sebagian (masih mengandung sifat kondukor) ataupun konduktor yang masih memiliki sifat dielektri

Secara umum keempat persamaan maxwell dapat dituliskan sebagai :

$\nabla . E = 0$ ....(2.1)

$\nabla . H = 0$ ....(2.2)

$\nabla \times E = \mu = \frac{\partial E}{\partial T}$ ....(2.3)

$\nabla \text{ X } H = J + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$ ....(2.4)

Dan dari Hukum Ohm :

$J = \sigma E$ ....(2.5)

Dimana

σ = konduktivitas

E = intensitas medan listrik

Dengan demikian persamaan (2.4) dapat ditulis kembali sebagai :

$\nabla \times H \sigma E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$ ....(2.6)

Dengan menerapkan formula vektor (1.5) pada (2.6) persamaan diatas diperoleh :

$$\nabla \times \nabla . H) = \nabla \times (\sigma E + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times E)$$

$$\nabla (\nabla . H) - \nabla^2 H = \sigma (\nabla \times E) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times E)$$

$$0 - \nabla^2 H = -\mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (-\mu \frac{\partial H}{\partial t})$$

$$- \nabla^2 H = -\mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 H - \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad \text{...(2.7)}$$

Jika diterapkan idenditas vektor (1.5) pada (2.6) maka diperoleh :

$$\nabla \text{ x } \nabla \text{ x } E) = -\mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} (\nabla \text{ x } H)$$

$$\nabla(\nabla.E) - \nabla^2 E = \mu \frac{\partial}{\partial} (\sigma \; E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t})$$

$$0 - \nabla^2 \text{E} = \mu \frac{\partial E}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \; E - \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \text{..(2.8)}$$

untuk gelombang yang menjalar pada satu dimensi, misalnya sumbu-z, maka persamaan diats menjadi :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^t} E - \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu \; \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad \text{...(2.9)}$$

dan solusi persamaan (2.9) adalah :

E(z,t) = $E_0 e^{\pm yz} e^{jw1}$ ………………………………………………………...(2.10)

Dimana : $\gamma = \alpha + j\beta$

= bilangan kompleks sebagai kontanta propagasi

untuk memperoleh harga γ, subtitusikan pers (2.10) ke (2.9) yaitu :

$$(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}) E_0 e^{\gamma} e^{jwi} = 0$$

$$\left[\gamma^2 - \mu\sigma(j\omega) - \mu\varepsilon(j\omega)^2\right] E_0 e^{\gamma} e^{j\omega i} = 0$$

$$\gamma^2 = \mu\sigma(j\omega) + \mu\varepsilon(j\omega)^2 = 0$$

$$\gamma = \left[j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)^2\right]^{\frac{1}{2}} \text{...(2.11)}$$

hasil dari pemecahan γ *akan mengahasilkan bilangan kompleks* (α + jβ), α adalah bilangan real dan jβ adalah imajiner

Impedansi Intrinsik

$$\eta = \frac{\left\| E(z - t) \right\|}{\left\| H(z - t) \right\|} \quad \text{..(2.12)}$$

dan dari pers (2.3) diperoleh H :

$$H = -\frac{1}{\mu}\int \nabla xE \ dt \ \text{..(2.13)}$$

$$\nabla \text{ x E} = \begin{pmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_x & \hat{a}_x \\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z} \\ 0 & E_0 e^y e^{jwt} & \end{pmatrix} \text{ ....(2.14)}$$

$$\nabla \text{ x E} = \hat{a}_x \gamma \ E_0 e^{-\gamma z} e^{j\varpi t} \quad \text{..(2.15)}$$

maka :

$$H(z,t) = -\frac{1}{\mu}\int E_0 e^{-\gamma z} e^{j\varpi t} dt \ \hat{a}_x$$

$$H(z,t) = -\frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0 e^{-\gamma z} e^{j\varpi t} \ \hat{a}_x \text{ ....(2.16)}$$

masukan ke (2.12) :

$$\eta = \frac{E_0 e^{-\gamma z} e^{j\varpi t}}{j^\gamma \varpi t E_0 e^{-\gamma z} e^{j\varpi t}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \text{ ....(2.16)}$$

masukan ke (2.12) :

$$\eta = \frac{E_0 e^{-\gamma z} e^{j\varpi t}}{j^\gamma \varpi t E_0 e^{-\gamma z} e^{j\varpi t}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \text{ ....(2.17)}$$

$$\eta = \frac{j\varpi t}{\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}} + \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \text{ ....(2.18)}$$

dengan :

ω = frekuensi angu;er (rad/s)

$\mu = \mu_r \mu_0$ = permeabilitas medium

σ = konduktor medium

dengan demikian jika diketahui

E(z,t) + $E_0 e^{-y\omega t}$

Kita dapat menentukan H (z,t) dengan :

$$H(z,t) = \frac{E(z,1)}{\eta}$$

$$H(z,t) = \frac{E_0 e^{-\gamma z} e^{j\omega t}}{\sqrt{\frac{\sigma + j\omega\varepsilon}{j\omega\mu}}}$$

$$H(z,t) = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} E_0 e^{\gamma\omega t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.19)$$

terlihat dari hubungan E dan H memungkinkan terjadi fasa.

BAB III
GELOMBANG ELEKTROMAGNETIK
DALAM DIELEKTRIK SEMPURNA

Dalam dielektrik sempurna, konduktifitasnya sangatlah kecil sehingga dapat dianggap nol (σ = 0). Dengan demikian untuk menentukan impedansi intrinsik η dan konstanta propagansi gelombang γ sama dengan untuk medium, hanya bedanya

σ = 0. maka persamaan (2.11) menjadi :

$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\,(\sigma + j\omega\varepsilon)^2}$ ....(3.1)

$\gamma = \left[j\omega\mu\,(\sigma + j\omega\varepsilon)^2\right]^{\frac{1}{2}}$..(3.2)

kita tahu dari : $\gamma + \alpha + j\beta$ maka diperoleh α = dan

$v = \sqrt{\dfrac{1}{\mu\varepsilon}}$ ....(3.4) dengan

demikian $v = \dfrac{\omega}{\beta}$ ....(3.5)

$$f.\lambda = \frac{2\pi\ f}{\beta}$$

$\lambda = \dfrac{2\pi}{\beta}$ ....(3.6)

atau : $\lambda = \dfrac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$ ....(3.7)

dengan demikian medium dielektrik sempurna dari pers (2.10) yaiyu :

$E(z.t) = E_0 e^{\pm\gamma z} e^{j\omega t}$

Dimana : $\gamma = \alpha + j\beta$

$E(z,t) = E_0\, e^{\pm j\beta z} e^{j\omega t}$ ……………………………………….(3.8)

Maka : $E(z,t) = E_0\, e^{j(\omega t \pm \beta z)}$

Dengan : $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{(\mu_r\ .\ \mu_0)(\varepsilon_r\ .\ )}$ ……………………….(3.9)

Sedang impedansi intrinsik, dari persamaan (2.10) tapi untuk harga σ + 0 maka :

$\pi = \sqrt{\dfrac{j\omega\varepsilon}{j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} =$ ....(3.10)

$$\pi = \sqrt{\frac{(\mu_r\ .\ \mu_{0)}}{(\varepsilon_r\ .\ \varepsilon_0}}$$

$\pi = 120\,\pi\sqrt{\dfrac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$ ....(3.11) dengan demikian $H\,(z,t) = \dfrac{1}{\eta} E_0\, e^{\,j(\omega \pm \beta)}$ ....(3.12)

karena $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} \angle 0^0$ maka antara E dan H tidak terdapat benda fasa

Nampak dari solusi (3.8) dan solusi (3.12) E dan H mempunyai amplitudo yang tetap, tidak dipengaruhi oleh médium (tidak ada pelemahan amplitudo gelombang) atau dengan kaya lain tidak terdapat attenuasi.

BAB IV

GELOMBANG ELEKTRO MAGNETIK

PADA PENGAHANTAR SEMPURNA

Pengahantar sempurna : $\sigma >> \omega\varepsilon$ pada jangkauan frekuensi yang bisa digunakan, misalnya tembag $\sigma = 5{,}8 \times 10$ s m

$\varepsilon \approx \varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}$ ($F/_m$) pada frekuensi 10^{10} s m ωε = (10^{10}) . (8,854χ x 10^{-2}

bandingan dengan harga σ, sehingga harga ωε dapat diabaikan.

Harga dari parameter η,γ untuk medium penghantar sempurna akan didekati dengan mengabaikan garga ωε dari kondisi medium umum

Pada medium umum : $\gamma \left| j\omega\mu\,(\sigma + j\omega\varepsilon)\right|^{1/2}$

Sedangkan pada pengantar sempurna

$\gamma = \sqrt{j\omega\mu} = \sqrt{\omega\mu\sigma}\ \angle 45^0$ ....(4.1)

Dimana $\gamma = \alpha + j\beta$

Sehingga : $\alpha = \beta = \sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}$ *atau* $\gamma = \sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}} + \sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}$ . ...(4.2)

Impendansi Listrik

Kita pada medium umum $\eta = \sqrt{\dfrac{j\mu\sigma}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$, maka untuk panghantar sempurna

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}\ \angle 45^0 \quad \text{...(4.3)}$$

Attentuasi Gelombang

Persamaan 3 medan di medium pengahantar sempurna, misal gelombang E dengan Persamaan getra pada sumbu-x adalah :

$$E(z.t) = E_0 e^{\gamma} e^{j\omega t}\hat{a}_x \quad \text{..(4.4)}$$

$$E(z.t) = E_0 e^{-(\alpha + j\beta)z} e^{j\omega}\hat{a}_x \quad \text{...(4.5)}$$

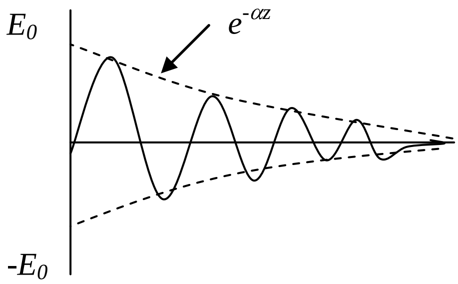
$$E(z.t) = E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}\hat{a}_x \quad \text{...(4.6)}$$

$$E(z.t) = \frac{1}{|\eta|} E_0^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z - \pi/4)z} e^{j\omega}\hat{a}_{yx} \quad \text{...(4.8)}$$

cepat rambat gelombang. $v = \dfrac{\omega}{\beta}\sqrt{\dfrac{2\omega}{\mu\sigma}}$ ....(4.8)

faktor $e^{-\alpha z}$ pada persamaan gelombang di atas menunjukan adanya pelemahan amplitudo gelombang yang disebut attenuasi (pelemahan) sedang faktor

$\dfrac{1}{\alpha}$ disebit skin depth (kedalaman kulit).



$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu\sigma}} \text{ ....(4.10)}$$

Contoh

Perpindahan Gelombang Dalam Dielektrik Semuprna

1. Pada bidang yang sama sebuah gelombang merambat dengan frekuensi 9375 MHz di dalam polystyrene (ε_R = 2,56 ; $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 0{,}00005$), jika amplitude dari intensitas medan listrik 20 V / m dan intensitas bahan diabaikan, tentukan:
   a. Konstanta phasa (β)
   b. Panjang Gelombang (λ)
   c. Kecepatan Perambatan (v)
   d. Impedansi Intrinsik (η)
   e. Konstanta Perambatan (γ)
   f. Amplituda intensitas medan magnet (Hy)

Pembahasan :

Dik : f = 9375 Mhz

ε_R = 2,56

$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ = 5 X 10^{-5}

μ_0 = 4π X 10^{-7}

ε_0 = 8,85 X 10^{-12}

Dit : a) β = ?

b) λ = ?

c) v = ?

d) η = ?

e) γ = ?

f) Hy = ?

Jawab :

a) β $= \omega\sqrt{\mu\omega} = 2\pi\ f\ \sqrt{(\mu_r \cdot \mu_0)(\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0)}$

$= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9375\ x\,10^{6}\ \sqrt{4\pi x 10^{-7} \cdot 1 \cdot 2{,}56 \cdot 8{,}85\ x\,10^{-12}} = 314\ (^{rad}/_{sec})$

b) $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{314} = 0{,}2\ m$

c) $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi\ f}{314} = \frac{2\pi .9475\ \ x\,10^{6}}{314} = 1{,}87\ \ x\,10^{8}\ {}^{m}/_{s}$

d) $\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\varepsilon_R}} = 377\ \sqrt{\frac{1}{2{,}56}} = \frac{377}{2{,}56} = 236\ \ \Omega$

e) γ = α jβ, karena α = maka γ = jβ = j 214 m^{-1}

f) $hy = \frac{Ex}{\eta}$

E_x = 20 cos (ω*t* - β *z*) = 20 cos (5,9 x 10^{10} *t*- 314_z)

$Hy\ = \frac{20}{236}\cos(\,5{,}9\ \ x\ 10^{10}\ t - 314\ _z\,)$

maka = 0,084 cos(5,9 x 10^{10} *t*- 314_z)

Perpindahan Gelombang Dalam Médium Udara

2. Intensitas medan magnet pada bidang yang sama di udara adalah 20 A/m dalam arah $\hat{a}_y$ Gelombang merambat dalam arah $\hat{a}_y$ pada frekuensi angguler 2 x 10^9

rad/d. Cari ;

a) Frekuensi :(f)
b) Panjang Gelombang (λ)
c) Periode (T)
d) Amplitudo E

Pembahasan

Dik : Hy = 20 20 A/m

ω = 2 x 10^9 rad/s

Dit : a) f = ?

b) λ = ?

c) T = ?

d) A_E = ?

Jawab :

a) $\omega = 2\pi f$

$$f = \frac{\varpi}{2\pi} = \frac{2x10^9}{6,28} = 318\ x10^6\ (Hz)$$

b) $$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3x10^8}{328\ x10^6} = 0,943\ (m)$$

c) $$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{318\ x10^6} = 3,14\ (ns)$$

d) $$\frac{Ex}{Hy} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \text{dim } ana \sqrt{\frac{\mu_0}{\omega_0}} = 377\ \Omega\ (vakum\ /\ udara)$$

Ex = 20 . 377 = 7540 (V/m)

(William H. Hayt, JR. Engineering Electromagnetic, halaman 344, Mc. Graw Hill).

BAB V
DAYA DAN VEKTOR POYNTING

Gerak gelombang merupakan proses perambatan gangguan tertentu, setiap gangguan memerlukan gangguan energi (momentum). Oleh karena itu gerak gelombang merupakan proses perambatan energi. Ini berlaku juga untuk gelombang elektromagnetik. Untuk menjelaskannya, kita mulai dengan persamaan Maxwell berikut ini:

$$\nabla x\ H = \sigma\ E + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{.......(5.1)}$$

ambil product skalarnya dengan E, maka diperoleh :

$$E(\nabla xH) = \sigma E^2 + E.\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{.......(5.2)}$$

$$E(\nabla xH) = \sigma E^2 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} \text{ ……………………………………………………}(5.3)$$

dari identitas vector ∇ (AxB) = B (∇ xA) – A(∇ xB)………………………...(5.4)

atau A(∇ xB)=B(∇ xA) – ∇ (AxB)……………………………………………(5.5)

maka E (∇ xH) = H (∇ xE) - ∇ (ExH)……………………………………...(5.6)

dari pers (5.3) dan pers (5.6) diperoleh :

E(∇ xH) = H(∇ xE) – ∇ (ExH) = E(∇ xH) = $\sigma E^2 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t}$ …………………(5.7)

Dari pers.Maxwell : ∇ x E = $-\mu \frac{\partial H}{\partial t}$ …………………………………………(5.8)

$$H\left(-\mu\frac{\partial H}{\partial t}\right) - \nabla(ExH) = \sigma E^2 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} \text{ ………………………………}(5.9)$$

$$-\frac{\mu}{2}\frac{\partial H^2}{\partial t} - \nabla(E\ x\ H) = \sigma E^2 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} \text{ ………………………………..}(5.10)$$

$$-\nabla(E\ x\ H) = \sigma E^2 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{\mu}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} \text{ ………………………………..}(5.11)$$

$$\nabla(E\ x\ H) = \sigma E^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{2}H^2 + \frac{\mu}{2}E^2\right) \text{ ………………………………}(5.12)$$

kemudian pers. (5.12) kita integrasikan ke seluruh volume, sehingga:

$$-\int_v \nabla(X\ \ x\ H)dv = \int_v \sigma E^2 dv + \frac{\partial}{\partial t}\int_v\left(\frac{\mu}{2}H^2 + \frac{\varepsilon}{2}E^2\right)dv \text{ ………………………..}(5.13)$$

dengan menggunakan teorema integral divergensi, kita peroleh:

$$-\int_S \nabla(X\ \ x\ H)dv = \int_V \sigma E^2 dv + \frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\mu}{2}H^2 + \frac{\varepsilon}{2}E^2\right)dv \text{ ………………………..}(5.14)$$

per (5.14) mempunyai makna fisis sebagai berikut:

Jika dalam volume tersebut tidak terdapat sumber, maka $\int_V \sigma E^2 dv$ *= daya Ohmik yang didesipasikan dalam volume tersebut atau energi yang berubah menjadi panas per satuan waktu pada volume tersebut.*

Jika dalam volume tersebut terdapat sumber, maka integrasi ke seluruh volume sumber akan berharga positif jika diberikan ke sumber, dan berharga negative jika daya dikeluarkan oleh sumber tersebut.

$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{\mu}{2}H^2 + \frac{\varepsilon}{2}E^2\right)dv$ adalah laju pertambahan energi yang tersimpan dalam bentuk medan listrik dan medan magnet dalam volume ini.

Jadi daya total yang mengalir keluar dari volume tersebut merupakan penjumlahan kedua suku $\int_V \sigma E^2\, dv$ dan $\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{\mu}{2}H^2 + \frac{\varepsilon}{2}E^2\right)dv$, yang sama dengan $-\oint_S \nabla(E\ x\ H)dS$ yang menyatakan integral yang mencakup seluruh permukaan tertutup yang melingkupi volume tersebut.

Sedangkan E x H dikenal sebagai vector poyting P atau P = E x H …………(5.15)

Yang dinyatakan sebagai kerapatan daya sesaat dalam satuan $^{watt}/_{m2}$, arah vector pointing merupakan arah aliran daya sesaat pada titik tersebut..

Misalkan gelombang elektromagnetik mengalir pada suatu dimensi di dalam medium dielektik sempurna E(z,t) = E_0 cos (ωt – βz) $\hat{a}_x$ ……………………(5.16)

Dan E(z,t) = E_0 cos (ωt – βz) $\hat{a}_x$ ……………………………………………..(5.17)

Maka P = E(z,t) x H(z,t) …………………………………………………..(5.18)

$$P = P_z = \frac{E_0^2}{\eta}\cos^2(\varepsilon t - \beta z)\ \hat{a}_x \text{ ………………………………………..(5.19)}$$

Nampak jika arah getar medan listrik kearah x dan medan magnet kearah y, maka menghasilkan penjalaran gelombang kearah sumbu z (notasi P_z untuk menandakan arah vector P).

Kerapatan Daya Rata-rata

Kerapatan daya rata-rata dinyatakan dengan $P_{z,av} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$ ……………..(5.20)

Untuk contoh di atas T = 2π, sehingga :

$$P_{z,av} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{E_0^2}{\eta}\cos^2(\omega t - \beta z)d(\omega t)$$

$$P_{z,av} = \frac{1}{2\pi}\frac{E_0^2}{\eta}\int_0^{2\pi}\cos^2(\omega t - \beta z)d(\omega t)$$

$$P_{z,av} = \frac{E_0^2}{2\pi\eta}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2(\omega t - \beta z)\right\}d(\omega t)$$

karena $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2(\omega t - \beta z) d(\omega t) = 0$ *maka* $P_{z,av} = \frac{E_0^2}{2\pi\eta}(\pi) = \frac{E_0^2}{2\eta}$

sehingga : $P_{z,av} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\eta} S\ ({}^{watt}/{}_{m^2})$ …………………………………………..(5.21)

Jadi, daya rata-rata yang mengalir melalui setiap permukaan seluas S yang normal terhadap sumbu z adalah $P_{z,av} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\eta} S\ ({}^{watt}/{}_{m^2})$ ……………………………(5.22)

Untuk gelombang elektromagnetik yang menjalar dalam medium umum, kita tahu antara E dan H terdapat beda fase, yang diakibatkan oleh impedansi intrinsiknya yang mempunyai sudut.

$$\eta = \eta_m \angle 0^0$$

$$E(z,t) = E_0 a^{az} \cos(\omega t - \beta z)\ \hat{a}_x \quad \text{……………………………………..(5.23)}$$

$$H(z,t) = \frac{E_0}{\eta_m} a^{az} \cos(\omega t - \beta z - 0)\ \hat{a}_y \quad \text{…………………………………(5.24)}$$

maka : $P_z = \frac{E_0^2}{\eta_m} t^{-2az} [\cos(\omega t - \beta z)\cos(\omega t - \beta z - 0)]$ …………………………(5.25)

dengan menggunakan identitas :

$$\cos A . \cos B = \frac{1}{2}\cos(A + B) + \frac{1}{2}\cos(A - B) \quad \text{………………………….(5.26)}$$

pers. (5.25) menjadi :

$$P_z = \frac{E_0^2}{\eta_m} t^{-2az} \frac{1}{2}[\cos(2\omega t - 2\beta z - 0) + \cos] \quad \text{…………………………...(5.27)}$$

karena : $\int_0^{2\pi} [\cos(2\omega t - 2\beta z - 0) + \cos 0] = 0$ …………………………………..(5.28)

$$P_{z,av} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\eta_m} e^{2az} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos 0\ dt = 0 \quad \text{…………………………...............(5.29)}$$

maka :

$$P_{z,av} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\eta_m} e^{2az} \cos 0 \quad \text{…………………………...............................(5.30)}$$

Contoh:

1. Jika diketahui medan listrik E (z,t) = $100e^{az}\cos(600\pi \text{ x } 10^6 t - \beta z)\ \hat{a}_x\ (^V/_m)$ dalam medium yang memiliki $\sigma = 20\ (^S/_m)$, $\varepsilon_r = 50$, $\mu = 1$. Jika z = 1 mm, hitunglah :
   (a) γ, α, β, z
   (b) E(z,t) untuk z = 1 mm dan H (z,t) untuk z = 1 mm
   (c) P_z
   (d) $P_{z,av}$

Penyelesaian :

a) Harga-harga di atas menunjukkan gelombang menjalar dalam medium umum (dielektrik merugi), sehingga :

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\,(j\omega\varepsilon + \sigma)}$$

$$= \sqrt{j(600\pi \cdot 10^6)(4\pi \cdot 10^8 \cdot 50 \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^9 + 20)}$$

$$\gamma = \sqrt{240\pi^2\ j\left(\frac{5}{6} + 20\right)}$$

$$= \sqrt{-200\pi^2 + j4800\pi^2}$$

$$= \pi\sqrt{-200 + j4800}$$

$$= \pi\sqrt{4804,16\ \angle -87,6}$$

$$= 69,3\pi \angle -43,8^0$$

Jadi $\gamma = 217,6 \angle -43,8^0$ atau

γ = 217,6 cos (-13,8) + j sin (43,8)

= 157 – j150,6

Maka $\alpha = 157\ (^{rad}/_m)$ dan $\beta = 150,6\ (^{rad}/_m)$, sedangkan

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j600\pi \cdot 10^6\ x\ 4\pi \cdot 10^{-7}}{20 + \left(j600\pi \cdot 10^6\ x\ 50 \cdot \frac{1}{36} \cdot 10^{-9}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{j240\pi^2}{20 + j\frac{5}{6}}} = \sqrt{\frac{240\pi^2 \angle 90^0}{20,017 \angle 2,38^0}} = \sqrt{11,99\pi^2 \angle 87,62^0} = 3,46\pi \angle 43,81^0$$

Jadi $\eta = 10,86 \angle 43,81^0$

b) E(z,t) = $100e^{-\alpha z}\cos(600\pi \,.\, 10^6\, t - \beta\, z)\,\hat{a}_x$

$= 100e^{-\alpha z} \cos (6\pi \,.\, 10^8 t - 150{,}6z)\, \hat{a}_x$

$\alpha z = 157 \,.\, 10^{-3} = 0{,}157$ rad

$\beta z = 150{,}6 \,.\, 10^{-3} = 0{,}150$ rad $= 0{,}150 \,.\, 57{,}3^0 = 8{,}59^0$

$E(z,t) = 100e^{-0{,}57} \cos (6\pi \,.\, 10^8 t - 8{,}59^0)\, \hat{a}_x \, (^V/_m)$

$$H(z,t) = \frac{100}{10{,}86} e^{-0{,}157} \cos (6\pi \,.10^8 \text{ t - } 52{,}4^0)\; \hat{a}_y \;(^V/_m)$$

c) $P_z = E(z,t) \times H(z,t)$

$$= 100e^{-0{,}157} \cos (6\pi \,.\, 10^8 t - 8{,}59^0)\; \hat{a}_x \;\text{x}\; \frac{100}{10{,}86} e^{-0{,}159} \cos(6\pi \,.10^8 t - 52{,}4^0)\; \hat{a}_x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{10{,}86} e^{-0{,}157} [\cos(4\pi 10^6 t - 60{,}99 + \cos 43{,}81)]$$

d) $P_{z,\alpha v} = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{10{,}86} e^{-0{,}157} \cos 43{,}81$

BAB VII
GELOMBANG TEGAK

Jika gelombang yang sedang berjalan dalam dielektrik sempurna jatuh secara normal pada perbatasannya dengan konduktor yang baik, maka akan terjadi paduan gelombang datang dan pantul yang membentuk gelombang tegak *(standing wave)*.

Medium dielektrik

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Konduktor

$r \approx \propto \quad (besar)$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^0 \approx 0$$

secara matematis :

$$E(z,t) = \left(E_0^i e^{j(\omega t - \beta z)} + E_0^r e^{j(\omega t - \beta z)} \right) \hat{a}_x \text{ ....(7.1)}$$

$$= e^{j\omega t} \left(E_{i0} e^{-j\beta z} + E_0^r e^{-j\beta z} \right) \hat{a}_x \text{ ....(7.2)}$$

Sedangkan : $\Gamma_E^r = \frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ dan karena $\eta_2 = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^0 \approx 0$, maka

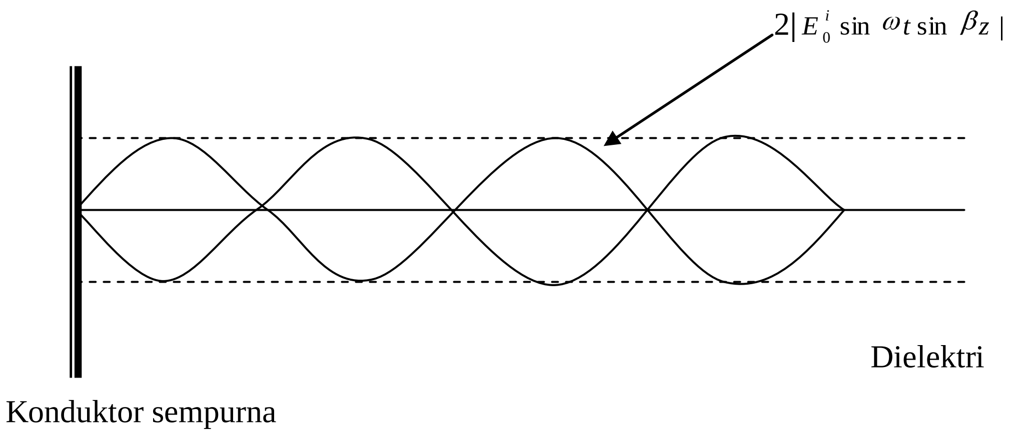
$$\Gamma_E^r = \frac{\eta_1}{\eta_2} = -1 \text{ karena } \Gamma_E^r = \frac{E_0^r}{E_0^i} = -1 \Rightarrow E_0^r = -E_0^i$$

maka pers. (7.2) menjadi:

$$\begin{aligned} E(z,t) &= e^{j\omega t}\left[E_0^i e^{-j\beta z} - E_0^i e^{j\beta z}\right]\hat{a}_x \\ &= e^{j\omega t}\left[E_0^i \cos\beta z - jE_0^i \sin\beta z - jE_0^i \sin\beta z\right]\hat{a}_x \\ &= e^{j\omega t}\left[-2jE_0^i \sin\beta z\right]\hat{a}_x \\ &= -2jE_0^i z e^{j\omega t}\sin\beta z\,\hat{a}_x \\ &= -2j\left(E_0^i \cos\omega t + jE_0^i \sin\omega t\right)\sin\beta z\,\hat{a}_x \\ &= \left[-2jE_0^i \cos\omega t \sin\beta z\right]\hat{a}_x + \left[-2E_0^i \sin\omega t \sin\beta z\right]\hat{a}_x \text{ ....(7.3)} \end{aligned}$$

dengan mengambil bagian realnya dapat dipeorleh:

$$\text{Re}\left[E(z,t)\right] = \left[2E_0^i \sin\omega t \sin\beta z\right]\hat{a}_x \text{ ....(7.4)}$$



Karena $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ = bilangan gelombang, maka:

Pada z = $\lambda/4$ diperoleh : $E(\lambda/4, t) = 2E_0^i \sin \dfrac{2\pi}{\lambda}\left(\dfrac{\lambda}{4}\right) \sin \omega t = 2E_0^i \sin \omega t$

Pada z = $\lambda/2$ diperoleh : $E(\lambda/2, t) = 2E_0^i \sin \dfrac{2\pi}{\lambda}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right) \sin \omega t = 0$

Pada z = $3\lambda/4$ diperoleh : $E(3\lambda/4, t) = 2E_0^i \sin \dfrac{2\pi}{\lambda}\left(\dfrac{3\lambda}{4}\right) \sin \omega t = -2E_0^i \sin \omega t$

$$\left|E(3\lambda/4, t)\right| = 2E_0^i \sin \omega t$$

Pada z = λ diperoleh : E (λ,t) = 2 $E_0^i \sin \dfrac{2\pi}{\lambda}(\lambda) \sin \omega t = 0$

Dari $\Gamma'_E = \dfrac{E_0^r}{E_0^i} = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + n_2}$, jika η_1 dan η_2 adalah sembarang medium (real atau kompleks).

Jika η_1 adalah bilangan real positif dan η_2 adalah bilangan kompleks, maka $\Gamma = |\Gamma| e^{j\phi}$ ………………………………………………………………….…(7.5)

dimana ϕ adalah sudut phase yang dapat dihitung dengan cara phasor.

Gelombang total di daerah (1) (*dengan menghilangkan factor waktu)* adalah:

$E(z,t) = \left|E_0^i e^{-j\beta_{1z}}\right| \hat{a}_x$ ……………………………………………………..…(7.6)

kemudian karena : $\Gamma = |\Gamma| e^{j\phi} = \dfrac{E_0^r}{E_0^i}$, maka $E_0^r = E_0^i |\Gamma| e^{j\phi}$ ……………………..(7.7)

dan E(z,t) = $\left(E_0^i e^{-j\beta_{1z}} + |\Gamma| e^{j\phi} E_0^i e^{j\beta_{1z}}\right) \hat{a}_x$

atau : E(z,t) = $\left[E_0^i e^{-j\beta_{1z}} + |\Gamma| e^{j\phi} E_0^i e^{j\beta_{1z+\phi}}\right] \hat{a}_x$ ……………………………………..(7.8)

(1) E (z,t) akan maksimum jika phase kedua suku yang berada dalam kurung sama besar, yaitu : $(E(z,t)_{max} = \left(1+|\Gamma|\right) E_0^i$ …………………………………………(7.9)

diperoleh pada saat $-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + 2\pi n$ ………………………………(7.10)

dimana : $n = 0, \pm 1, \pm 2$, …..dst.

pers (7.10) dapat juga ditulis sebagai : $-\beta_1 z = \frac{\phi}{2} + \pi n$ ………………….(7.11)

- Jika $\phi = 0, E(z,t)_{\max}$ terletak pada z = 0 atau daerah perbatasan

  $\phi = 0$ ini terjadi jika Γ real positif, di mana $\eta_1$dan η_2 real, serta $\eta_1 < \eta_2$ artinya E (z,t) $_{max}$ terjadi di perbatasan ika impedansi intrinsic daerah (2) lebih besar dari impedansi intrinsic daerah (1).

- $\phi = \pi$ terjadi jika daerah (2) adalah konduktor sempurna, dapat dilihat dari:

  $$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = -1$$

  $\Gamma = 1e^{j\pi} = 1 \cos \pi + j \sin \pi = -1$

  η_1 dan η_2 real, serta $\eta_1 > \eta_2$

  $\Gamma = 1e\ j^{\pi} = C(\cos \pi + j\sin \pi) = -C$

  sebagai konsekuensinya jika $\phi = \pi$, dengan menggunakan pers. (7.10), $E(z,t)_{max}$ akan terjadi pada saat :

  $-\beta_1 z = \beta_1 z + \pi + 2\pi n \rightarrow -\beta_1 z = (2n+1)\pi$ atau $-\beta_1 z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$

  atau $-\beta_1 z = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} ....dst$ ……………………………………………(7.11)

(2) Sedangkan $E(z,t)_{min}$ terjadi jika phase kedua suku yang berada dalam kurung berbeda sebesar 180^0 (π rad), yaitu :

$E(z,t)_{min} = \left(1+|\Gamma|\right) E_0^i$ ……………………………………………………..(7.12)

diperoleh pada saat $-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + \pi + 2\pi n$…………………………..(7.13)

dimana : $n = 0, \pm 1, \pm 2$, …..dst

pers. (7.13) dapat juga ditulis sebagai :

$$-\beta_1 z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{..........(7.14)}$$

Standing Wave Ratio

Adalah perbandingan antara amplitude maksimum terhadap amplitude minimum, atau dituliskan sebagai:

$$S = \frac{E(z,t)_{\max}}{E(z,t)_{\min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \quad \text{..........(7.15)}$$

karena $\Gamma \leq 1$ maka S selalu positif dan $S \geq 1$.

Jika $\Gamma = 1$, (semua gelombang yang dating dipantulkan) maka S = $\frac{1+1}{0} = \propto$.

Jika $\Gamma = 0$, yaitu jika $\eta_1 = \eta_2$, maka S =1 artinya harga amplitude maksimum dan minimum adalah sama.

Impedensi Input η_{in}

Pada z = -1 dengan menyimpan fungsi waktunya

$$E(z,t) = \left[e^{j\beta^{it}} \quad E_0^i \quad \text{..........(7.16}\right.$$

sedangkan $\frac{E_0^i}{E_0^i} = \eta$ untuk Γ berlaku $\Gamma_H = -\Gamma_E$

maka $H(z,t) = \frac{1}{\eta}\left[e^{j\beta 1t} + \Gamma e^{j\beta 1t}\right] E_0^i$

$$\eta_{in} = \frac{E(z,t)}{H(z,t)} \text{ pada z = -1}$$

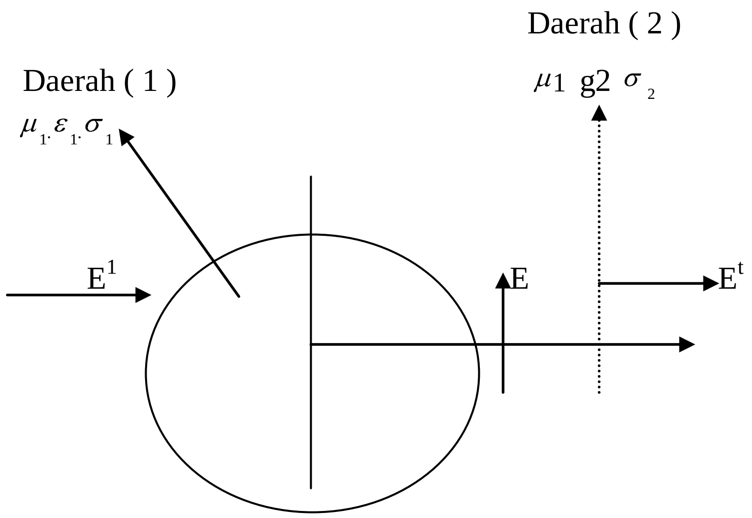
$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{e^{j\beta t1} + \Gamma e^{-j\beta 1^t}}{e^{j\beta t1} - \Gamma e^{-j\beta 1^t}} \quad \text{..........(7.17)}$$

dengan mengambil $\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$ dan menggunakan notasi Euler, maka diperoleh :

BAB VI

PEMANTULAN GELOMBANG

Apabila suatu gelombang berjalan mencapai pembatasan dua medium yang berlainan, maka gelombang tersebut sebagian akan diteruskan dan sebagian lainnya akan dipantulkan. Besarnya bagian yang dipantulkan maupun yang diteruskan ditentukan oleh konstanta-konstanta kedua medium.



Pada gambar diatas suatu gelombang berjalan E mendekati perbatasan z = 0 dari daerah (1) atau z < 0.

E^0 = gelombang datang

E^r = gelombang yang direfleksikan

Kedua gelombang tersebut berada pada daerah (1)

E^t = gelombang yang ditransmisikan (berada pada daerah 2)

Jika gelombang datang dianggap normal terhadap permukaan batas medium

E^0 (z,t) = $E_0^{i\,-y1z} e^{j\omega t}\alpha_1$ ………………………………………………… (6.1)

E_r (z,t) = $E_0^r e^{+y1z} e^{j\omega t}\alpha_2$ ……………………………………………….. (6.2)

E_t (z,t) = $E_0^r e^{-y1z} e^{j\omega t}\alpha_3$ ……………………………………………….. (6.3)

H^0(z,t) = $H_0^i e^{-y1z} e^{j\omega t}\alpha_\mu$ ……………………………………………….. (6.4)

H_r(z,t) = $H_0^r e^{+y1z} e^{j\omega t}\alpha_\mu$ ………………………………………………… (6.5)

H_t(z,t) = $H_0^t e^{-y1z} e^{j\omega t}\alpha_\mu$ ……………………………………………….. (6.6)

Karena gelombang datang normal (saling tegak lurus) terhadap medium, maka E

Dan H seluruhnya tangensial pada permukaan batas medium. Gelombang harus memenuhi syarat kontinuitas pada perbatasan (z = 0), sehingga :

$$E^i(z,t) + E^r(z,t) = E^t(z,t) \ldots\ldots \quad (6.7)$$

$$E_0^i e^{-y1z} e^{j\omega t} \alpha_x + E_0^r e^{+y1z} e^{j\omega t} \alpha_x = E_0^t e^{-y2z} e^{j\omega t} \alpha_x \ldots\ldots \quad (6.8)$$

Pada z = 0, maka pers (6,8) menjadi :

$$E_0^i + E_0^r = E_0^t \ldots\ldots \quad (6.9)$$

Dan untuk medan H :

$$H_0^i + H_0^r = H_0^t \ldots\ldots \quad (6.10)$$

Hubungan antara E dan H adalah :

$$\frac{E_0^i}{H_0^i} = \eta_1 \ldots\ldots \quad (6.11)$$

$$\frac{E_0^r}{E_0^r} = -\eta_1 \ldots\ldots \quad (6.12)$$

$$\frac{E_0^t}{H_0^t} = \eta_2 \ldots\ldots \quad (6.13)$$

Dari pers (6.9) sampai dengan pers (6.13) dapat diturunkan hubungan :

$$\frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \ldots\ldots \quad (6.14)$$

Pers (6.13) menunjukkan perbandingan antara gelombang yang dipantulkan terhadap gelombang datang, ini diperoleh dari :

$$H_0^i + H_0^r = H_0^t$$

$$\frac{E_0^t}{\eta_2} = \frac{E_0^i}{\eta_2} - \frac{E_0^r}{\eta_1} \Rightarrow E_0^t = \frac{\eta_2}{\eta_1}\left(E_0^i - E_0^r\right)$$

$$E_0^t + E_0^r = \frac{\eta_2}{\eta_1}\left(E_0^i - E_0^r\right) = \frac{\eta_2}{\eta_1} E_0^i - \frac{\eta_2}{\eta_1} E_0^r$$

$$E_0^t\left[1 - \frac{\eta_2}{\eta_1}\right] = -E_0^r\left[1 + \frac{\eta_2}{\eta_1}\right] \Rightarrow E_0^i\left[\frac{\eta_2}{\eta_1} - 1\right] = E_0^t\left[1 - \frac{\eta_2}{\eta_1}\right]$$

$$E_0^t\left[\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1}\right] = E_0^r\left[\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1}\right] \Rightarrow E_0^t\left(\eta_2 - \eta_1\right) = E_0^t\left(\eta_2 + \eta_1\right)$$

$$\frac{E_0^r}{E_0^t} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$$

Selanjutnya perbandingan ini disebut koefisien refleksi untuk medan listrik E dan ditulis sebagai $\Gamma_{E} = \frac{E_0^r}{E_0^t} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ ………………………………………… (6.15)

Koefisien Transmisi

Koefisien Transmisi adalah perbandingan antara gelombang yang diteruskan terhadap gelombang datang. Secara matematis :

$$\Gamma_{E} = \frac{E_O}{E_0} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad \text{………………………………………………………… (6.16)}$$

Ini diperoleh dari :

$$\frac{E_0^t}{\eta_2} = \frac{E_0^i}{\eta_2} - \frac{E_0^r}{\eta_1} \Rightarrow E_0^t = \frac{\eta_2}{\eta_1}\left(E_0^i - E_0^r\right)$$

$$\Rightarrow E_0^t = \frac{\eta_2}{\eta_1}E_0^i - \frac{\eta_2}{\eta_1}\left(E_0^i - E_0^r\right)$$

$$\Rightarrow E_0^t\left[1 + \frac{\eta_2}{\eta_1}\right] = 2\frac{\eta_2}{\eta_1}E_0^i$$

$$\Rightarrow E_0^t\left[1 + \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1}\right] = 2\frac{\eta_2}{\eta_1}E_0^i$$

Sehingga $\Gamma_E^t = \frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$ (*terbukti*)

Koefisien Refleksi Untuk Medan H

Adalah perbandingan antara medan H yang direfleksikan terhadap medan H yang datang. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\Gamma_0^t = \frac{H_0^t}{H_0^i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \quad \text{………………………………………………………… (6.17)}$$

Hubungan pers. (6.17) diatas diperoleh dari :

$$E_0^i + E_0^r = E_0^t \Rightarrow E_0^r = E_0^t - E_0^i$$

Dengan menggunakan pers. (6.11), (6.12), dan (6.13) diperoleh :

$$-\eta_1 H_0^r = \eta_2 H_0^t - \eta_1 H_0^i$$

dengan menggunakan pers. (6.16)

$$-\eta_1 H_0^r = \eta_2\left(H_0^i + H_0^r\right) - \eta_1 H_0^i$$

$$= \left(\eta_2 - \eta_1\right)H_0^i + \eta_2 H_0^r$$

$$-\left(\eta_1 + \eta_2\right)H_0^r = \left(\eta_2 - \eta_1\right)H_0^i$$

sehingga $\frac{H_0^r}{H_0^i} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 - \eta_2}$

Koefisien Transmisi Untuk Medan H

Secara matematis : $\Gamma_e^t = \frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$ ……………………….(6.18)

Pers. (6.16) diperoleh dari : $E_0^t = E_0^i + E_0^r$

$$-\eta_2 H_0^r = \eta_1 H_0^t - \eta_1 H_0^i$$

$$= \eta_1 H_0^t - \eta_1 (H_0^t - H_0^r)$$

$$(\eta_1 + \eta_2) H_0^r = 2\eta_1 H_0^t$$

sehingga :

$$\frac{H_0^t}{H_0^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

Beberapa Impedansi Intrinsik untuk berbagai medium

1. Penghantar dielektrik merugi (penghantar sebagian)

$$\eta = \sqrt{\frac{j\mu\omega}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \text{ ………………………………………………………………… (6.19)}$$

2. Penghantar konduktor yang baik

$$\eta = \sqrt{\frac{j\mu\omega}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} < 45^0 \text{ …………………………………………………… (6.20)}$$

3. Isolator dielektrik yang baik.

$$\eta = \sqrt{\frac{j\mu\omega}{j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r . \mu_0}{\varepsilon_r . \varepsilon_0}}$$

$$\eta = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\mu_0}} \text{ ……………………………………………………………. (6.21)}$$

4. Ruang bebas (udara).

$$\eta = \sqrt{\frac{j\mu_0\omega}{j\omega\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\,\pi \text{ …………………………………………………(6.22)}$$

Gelombang berjalan E dan H dalam ruang bebas (medium 1) jatuh secara tegak lurus pada permukaan dielektrik (medium 2) dengan ε_r = 3. bandingkan besar dari gelombang E dan H yang datang, dipantul dan diteruskan pada permukaan batas tersebut.

Jawab :

$$\eta_1 = \eta_0 = 120\pi$$

$$\eta_3 = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\ 120\pi\sqrt{\frac{1}{3}} = 217{,}7\,\Omega$$

$$\Gamma_e^r = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{217{,}7 - 377}{377 + 217{,}7} = \text{-}0{,}268$$

$$\Gamma_e^t = \frac{E_0^t}{E_0^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = 0{,}732$$

$$\Gamma_H^r = \frac{H_0^r}{H_0^i} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \frac{377 - 217{,}7}{377 + 217{,}7} = 0{,}267$$

$$\Gamma_H^t = \frac{H_0^t}{H_0^i} = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = 1{,}268$$