SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Sistem persamaan linear dengan m persamaan dan n bilangan tak diketahui ditulis dengan:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1n}x_{1n} = b_1 \\
a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{2n}x_{2n} = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \ldots + a_{mn}x_{mn} = b_m
\end{gathered}
$$

dimana $x_1, x_2, \ldots, x_n$: bilangan tak diketahui

a,b : konstanta

Jika SPL diatas ditulis dalam bentuk matriks, maka:

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

Suatu matriks yang berbentuk :

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}
$$

dinamakan *matrik yang diperbesar* (augmented matrix).

Jika $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, maka SPL tersebut disebut *sistem persamaan linear homogen.*

Jika $b_1, b_2, \ldots, b_m$ tidak semuanya nol, maka SPL tersebut disebut *sistem persamaan linear nonhomogen.* Kemungkinan-kemungkinan pemecahan SPL adalah:

a. tidak mempunyai penyelesaian.
b. Mempunyai tepat satu penyelesaian.
c. Mempunyai tak hingga banyaknya penyelesaian.

Sebuah SPL yang tidak mempunyai pemecahan disebut *tak konsisten* (inconsistent). Jika ada sekurang-kurangnya satu penyelesaian, maka SPL tersebut *konsisten* (consistent).

Salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan suatu SPL adalah *eliminasi Gauss / Gauss-jordan.* Prosedur yang digunakan dalam metode ini adalah dengan mereduksi matriks yang diperbesar menjadi bentuk eselon baris (eliminasi Gauss) atau bentuk eselon baris tereduksi (eliminasi Gauss-Jordan). Proses ini dilakukan dengan menggunakan operasi baris elementer.

Operasi – operasi baris elementer yang dimaksud meliputi:

a. Mengalikan sebuah baris dengan sebuah konstanta yang tidak sama dengan nol.
b. Menukarkan letak 2 baris.
c. Menambahkan perkalian dari satu baris pada baris yang lain.

ELIMINASI GAUSS/GAUSS-JORDAN UNTUK MENYELESAIKAN SPL NONHOMOGEN.

Contoh:

1. $x + y + 2z = 9$

   $2x + 4y - 3z = 0$

   $3x + 6y - 5z = 0$

   matriks yang diperbesar untuk system tersebut adalah: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

   Jika system tersebut diselesaikan dengan menggunakan eliminasi Gauss, maka langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

   langkah 1: baris 2 dikurangi 2 kali baris 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

   langkah 2: baris 3 dikurangi 3 kali baris 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

   langkah 3: baris 2 dikali ½

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

langkah 4: baris 3 dikurangi 3 kali baris 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

langkah 5: baris 3 dikalikan –2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

matriks diatas adalah bentuk eselon baris.

Langkah 6: Tentukan system yang bersesuaian dengan matriks pada langkah 5

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - 7/2z &= -17/2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

langkah 7: gunakan subtitusi balik untuk mencari penyelesaian system pada langkah 6, didapat:

$$x = 1,\ y = 2,\ z = 3$$

2. selesaikan dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 \qquad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 \qquad + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

matriks yang diperbesar untuk system tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Operasi baris elementer untuk mengubah matriks diatas menjadi bentuk eselon baris tereduksi adalah sbb:

$$\begin{array}{l} \\ B_2-2B_1 \\ B_4-2B_1 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-1)B_2 \\ B_3+5B_2 \\ B_4+4B_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_3 \Leftrightarrow B_4 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1/6)B_3 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ B_1+2B_2 \\ B_2-3B_3 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang bersesuaian adalah:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad + 4x_4 + 2x_5 \quad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \quad &= 0 \\ x_6 &= 1/3 \end{aligned}$$

didapat $x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$ $x_3 = -2x_4$ $x_6 = 1/3$

Misal $x_2 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$, maka didapat penyelesaian:

$x_1 = -3r - 4s - 2t$, $x_2 = r$, $x_3 = -2s$, $x_4 = s$, $x_5 = t$, $x_6 = 1/3$

SISTEM PERSAMAAN LINEAR HOMOGEN

Bentuk umum:

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \ldots + a_{1n}x_{1n} &= 0 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \ldots + a_{2n}x_{2n} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + \ldots + a_{mn}x_{mn} &= 0 \end{aligned}$$

Setiap SPL homogen adalah sistem yang konsisten, karena SPL homogen selalu mempunyai paling sedikit satu penyelesaian yaitu $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, . . ., $x_n = 0$. Pemecahan tersebut disebut *pemecahan trivial* (trivial solution). Jika ada pemecahan lain, maka pemecahan tersebut dinamakan *pemecahan taktrivial* (nontrivial solution). Untuk SPL homogen, maka salah satu dari pernyataan berikut benar:

a. Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
b. Sistem tersebut mempunyai tak hingga banyaknya penyelesaian taktrivial sebagai tambahan terhadap pemecahan trivial tersebut.

Contoh: Eliminasi Gauss-Jordan untuk menyelesaikan SPL homogen

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 \quad\quad + x_5 &= 0\\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0\\
x_1 + x_2 - 2x_3 \quad\quad - x_5 &= 0\\
x_3 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

matriks yang diperbesar untuk system tersebut adalah:

$$
\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

Operasi baris elementer untuk mengubah matriks diatas menjadi bentuk eselon baris tereduksi adalah sbb:

$$
\begin{array}{l} B_2 + B_3 \\ B_3 + B_2 \end{array}
\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
B_3 - B_2
\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{l} B_3 \Leftrightarrow B_4 \\ B_4 \Leftrightarrow B_2 \\ B_2 \Leftrightarrow B_3 \end{array}
\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
B_3.(-1/3)
\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{l} B_2 - B_3 \\ B_1 + B_2 \end{array}
\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
B_1.1/2
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

SPL yang bersesuaian adalah:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad & + x_5 = 0 \\ x_3 \qquad & + x_5 = 0 \\ x_4 \qquad & \quad = 0 \end{aligned}$$

penyelesaian untuk SPL diatas adalah:

$$x_1 = -x_2 - x_5$$
$$x_3 = -x_5$$
$$x_4 = 0$$

jika $x_2 = s$, $x_5 = t$ maka: $x_1 = -s - t$,$x_3 = s$, $x_4 = 0$