RUANG HASIL KALI DALAM

(*Inner Product*)

Definisi:

Sebuah **hasil kali dalam** (*inner product*) pada ruang vektor riil **V** adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan riil $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>$ dengan masing – masing pasangan vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ pada **V** sedemikian sehingga aksioma – aksioma berikut terpenuhi untuk semua $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ di **V** dan semua skalar k:

(1). $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}>$

(2). $<\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}> = <\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> + <\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}>$

(3). $<k\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> = k<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>$

(4). $<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}> \geq 0$ dan $<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}> = 0$ jika hanya jika $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

Sebuah ruang vektor riil dengan sebuah hasil kali dalam dinamakan **ruang hasil kali dalam riil**.

Contoh:

Misal $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1,v_2)$ adalah vektor – vektor pada $\mathbf{R}^2$. Tunjukan bahwa $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> = 3\, u_1\, v_1 + 2\, u_2\, v_2$ adalah ruang hasil kali dalam

Jawab:

Kita akan buktikan bahwa $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>$ memenuhi keempat aksioma diatas

(1). $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> = 3\, u_1\, v_1 + 2\, u_2\, v_2$

$= 3\, v_1\, u_1 + 2\, v_2\, u_2$

$= <\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}>$

(2). Jika $w = (w_1,w_2)$, maka

$<\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}> = 3(u_1 + v_1)w_1 + 2\,(u_2 + v_2)\, w_2$

$= 3u_1\, w_1 + 3\, v_1\, w_1 + 2\, u_2\, w_2 + 2\, v_2\, w_2$

$= (3u_1\, w_1 + 2\, u_2\, w_2) + (3\, v_1\, w_1 + 2\, v_2\, w_2)$

$= <\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}> + <\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}>$

(3). $<k\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> = 3\,(ku_1)\, v_1 + 2\,(ku_2)\, v_2$

$= k\,(3\, v_1\, u_1 + 2\, v_2\, u_2)$

$= k<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>$

(4). $<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}> = 3\, v_1\, v_1 + 2\, v_2\, v_2$

$= 3v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0$

dan

$<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}> = 3\, v_1\, v_1 + 2\, v_2\, v_2$

$= 3v_1^2 + 2v_2^2$ jika hanya jika $v_1 = v_2 = 0$ atau $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

jadi, $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> = 3\, u_1\, v_1 + 2\, u_2\, v_2$ adalah ruang hasil kali dalam.

Sifat – Sifat:

Jika **u**, ***v***, ***w*** adalah vektor – vektor dalam ruang hasil kali dalam riil dan *k* sembarang skalar, maka:

(a). $<\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{v},\boldsymbol{0}> = 0$

(b). $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}> = <\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> + <\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}>$

(c). $<\boldsymbol{u},k\boldsymbol{v}> = k<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>$

PANJANG DAN SUDUT DIRUANG HASIL KALI DALAM

Jika **V** adalah sebuah ruang hasil kali dalam, maka *norma* (panjang) vektor ***u*** dinyatakan oleh $\|u\|$ didefinisikan oleh

$$\|u\| = <\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}>^{1/2} = \sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + ... + u_n{}^2}$$

dan

jarak antara 2 vektor ***u*** dan ***v*** dinyatakan oleh $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ didefinisikan oleh

$$d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + ... + (u_n - v_n)^2}$$

jika θ adalah sudut antara ***u*** dan ***v***, maka:

$$\cos\theta = \frac{<u,v>}{\|u\|\|v\|},\ 0 \le \theta \le \pi$$

Contoh:

Misal $\boldsymbol{u} = (1,0)$, $\boldsymbol{v} = (0,1)$ dan $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> = 3\, u_1\, v_1 + 2\, u_2\, v_2$, maka

$\|u\| = <\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}>^{1/2} = [3.1.1 + 2.0.0]^{1/2} = \sqrt{3}$

$d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \|u - v\| = <1,-1> = [3.1.1 + 2.(-1).(-1)]^{1/2} = \sqrt{5}$

Definisi

Sebuah himpunan vektor pada ruang hasil kali dalam disebut himpunan *orthogonal* jika semua pasang himpuan vektor – vektor yang berbeda dalam himpuanan tersebut orthogonal. Sebuah himpunan yang orthogonal yang semua vektornya bernorma 1 dinamakan *orthonormal*.

Contoh:

Misal $\boldsymbol{u}$ = (0,1,0), $\boldsymbol{v}$ = ($\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$), $\boldsymbol{w}$ = ($\frac{1}{\sqrt{2}}$,0,-$\frac{1}{\sqrt{2}}$)

$<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> = 0$, $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}> = 0$, $<\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}> = 0$

jadi {***u***,***v***,***w***} himpunan yang orthogonal.

$\|u\| = 1$, $\|v\| = 1$, $\|w\| = 1$

jadi {***u***,***v***,***w***} himpunan yang orthonormal.

LATIHAN SOAL

1. Misal $\boldsymbol{u}$ = (2,-1), $\boldsymbol{v}$ = (0,-5), k = -3. hitunglah:
   a. $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>$
   b. $<\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}>$
   c. $<k\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>$

2. Hitunglah $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>$:
   a. $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
   b. $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

3. Jika $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> = 3\, u_1\, v_1 + 2\, u_2\, v_2$ adalah ruang hasil kali dalam di $\mathbf{R}^2$, hitunglah $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>$ untuk $\boldsymbol{u}$ = (-2,1), $\boldsymbol{v}$ = (1,4)

1. Tentukan $\|w\|$ untuk w = (-1,3), Jika w terdefinisi untuk:
   a. hasil kali dalam Euclidis
   b. hasil kali dalam Euclidis yang didefinisikan oleh $<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> = 3\, u_1\, v_1 - 2\, u_2\, v_2$

2. Hitunglah $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ jika $\boldsymbol{u}$ = (-1,2), $\boldsymbol{v}$ = (2,5)

3. Misalkan $\mathbf{R}^2$,$\mathbf{R}^3$,$\mathbf{R}^4$ mempunyai hasil kali dalam euclidis. Carilah cosinus sudut antara $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$
   a. $\boldsymbol{u}$ = (1,-3), $\boldsymbol{v}$ = (2,4)
   b. $\boldsymbol{u}$ = (-1,5,2), $\boldsymbol{v}$ = (2,4,-9)
   c. $\boldsymbol{u}$ = (1,0,1,0), $\boldsymbol{v}$ = (-3,-3,-3,-3)

2. Misalkan $\mathbf{R}^3$ mempunyai hasil kali dalam euclidis. Tentukan nilai k sehingga $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ orthogonal.
   a. $\boldsymbol{u}$ = (2,1,3), $\boldsymbol{v}$ = (1,7,k)
   b. $\boldsymbol{u}$ = (k,k,1), $\boldsymbol{v}$ = (k,5,6)

3. Misalkan $\mathbf{R}^3$ mempunyai hasil kali dalam euclidis. Manakah himpunan vektor berikut yang orthonormal.
   a. $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$
   b. (2/3,-2/3,1/3), (2/3,1/3,-2/3), (1/3,2/3,2/3)
   c. $(1,0,0),(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0,0,1)$
   d. $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}),(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

4. Misalkan $\boldsymbol{u} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$, $\boldsymbol{v} = (\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}})$. Tunjukan bahwa $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$ orthonormal jika $\mathbf{R}^2$ mempunyai hasil kali dalam $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = 3\, u_1 v_1 + 2\, u_2 v_2$, tetapi tidak ortonormal jika jika $\mathbf{R}^2$ mempunyai hasil kali dalam euclidis.