# MATRIKS

**Definisi:**

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang berbentuk segiempat siku-siku yang terdiri dari baris dan kolom.

**Notasi:**

Matriks dinyatakan dengan huruf besar, dan elemen elemennya dituliskan dalam tanda kurung.

Contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Ukuran matriks**

Ukuran suatu matriks dinyatakan berdasarkan banyaknya baris ( garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal).

Contoh: matriks **A** mempunyai 3 baris dan 2 kolom, maka ukuran matriks **A** adalah 3 x 2.

Matriks **B** berukuran 4 x 1 dan matriks C berukuran 3 x 3.

**Kesamaan matriks.**

Dua matriks dikatakan sama jika kedua matriks tersebut mempunyai ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian dari kedua matriks tersebut juga sama.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Perhatikan: A ≠ B, A ≠ C tetapi A = D

**Macam – macam matriks:**

a. Matriks bujursangkar / matriks Kuadrat

Matriks yang mempunyai jumlah baris dan jumlah kolom yang sama disebut matriks *bujur sangkar / matriks kuadrat* . Selanjutnya ukuran matriks bujursangkar disebut *orde*. Contoh : Matriks **C** adalah matriks kuadrat berorde – 3. entri-entri: -$\sqrt{2}$ , ½ , 0 pada matriks **C** disebut diagonal utama.

b. Matriks nol (zero matrix)

adalah suatu matriks yang semua elemenya nol.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. Matriks Diagonal

adalah suatu matriks kuadrat yang semua entri diluar diagonal utama adalah nol.

Contoh: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

d. Matriks Identitas / matriks satuan ( identity matrix)

adalah matriks kuadrat yang semua elemen pada diagonal utamanya adalah 1 dan elemen selain diagonal utama adalah 0. Matriks identitas dituliskan dengan I .

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e. Matriks segitiga (triangular)

matriks kuadrat disebut matriks segitiga atas ( upper triangular) jika semua entri dibawah diagonal utama adalah nol. Matriks kuadrat disebut matriks segitiga bawah ( lower triangular) jika semua entri diatas diagonal utama adalah nol.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 8 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga atas matriks segitiga bawah

**Matriks Transpose**

Jika A adalah sebarang matriks m x n, maka *transpose matriks A* ditulis $\mathbf{A}^t$ didefinisikan sebagai suatu matriks n x m yang didapat dengan jalan menukarkan baris dengan kolom pada matriks A dengan baris / kolom yang bersesuaian.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Sifat – sifat:

a. $(A^t)^t = A$

b. $(A + B)^t = A^t + B^t$

c. $(kA)^t = kA^t$, dimana k adalah skalar.

d. $(AB)^t = B^t \,.\, A^t$

**Operasi – Operasi Matriks**

1. Jika A dan B sebarang matriks yang mempunyai ukuran yang sama, maka **jumlah** A + B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama – sama entri yang bersesuaian dari kedua matriks tersebut.

   Contoh:

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   Maka:

   $$A + B = \begin{bmatrix} 1+(-2) & -2+2 & 0+0 \\ 0+4 & 3+0 & 5+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   A + C tidak didefinisikan.

2. Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu scalar, maka **hasil kali** (product) *c***A** adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari **A** oleh c.

   Contoh:

   $$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{maka } 2A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad (-1)A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. jika A dan B adalah matriks yang berukuran sama, maka **A – B** didefinisikan sebagai A + (-1) B.

   Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

4. Jika A adalah matriks m x r dan B matriks r x n, maka **hasil kali AB** adalah matriks m x n yang entri – entrinya ditentukan sbb. Untuk mencari entri dari baris i dan kolom j dari matriks AB, pilih baris I dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaiandari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkan hasilkali yang dihasilkan.

   Contoh:$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

   Karena A berukuran 2 x 3 dan B 3 x 4, maka AB berukuran 2 x 4. Misal untuk menentukan baris 2 kolom 3 dari matriks AB, kita dapat memilih baris 2 matrik A dan kolom 3 matriks B

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 26 & a_{24} \end{bmatrix}$$

$$(2 \,.\, 4) + (6 \,.\, 3) + (0 \,.\, 5) = 26$$

   Entri dari baris 1 dan kolom 4 matriks AB adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 13 \\ a_{21} & a_{22} & 26 & a_{24} \end{bmatrix}$$

$$(1 \,.\, 3) + (2 \,.\, 1) + (4 \,.\, 3) = 13$$

   Hasil selengkapnya:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

**Teorema:**

Misalkan A, B, C adalah suatu matriks dan *k*, *l* adalah konstanta, maka berlaku:

a. A + B = B + A ( Hukum komutatif)

b. A + (B + C) = (A + B) + C ( hukum asosiatif penjumlahan)

c. A(BC) = (AB)C (hukum asosiatif perkalian)

d. A(B + C) = AB + AC (hukum distributif)

e. (A + B) C = AC + BC (hukum distributif)

k (A + B) = kA + kB

g. (k + l) A = kA + lA

h. (kl)A = k(lA)

k(AB) = (kA)B