PERLUASAN MODEL *CUTTING STOCK* DUA DIMENSI

Khusnul Novianingsih

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Pendidikan Indonesia
email: khusnuln@yahoo.com

Abstrak

Terdapat *m* jenis bahan baku berbentuk persegi panjang yang akan dipotong menjadi final-final berbentuk persegi panjang sedemikian sehingga biaya produksi yang dikeluarkan untuk memenuhi *demand* seminimum mungkin. Dalam penelitian ini, tipe pemotongan yang diambil adalah tipe *guillotine* dengan orientasi pemotongan tetap. Dimisalkan pula bahwa terdapat batasan jumlah bahan baku untuk setiap tipenya. Masalah ini dapat diformulasikan sebagai model *integer programming* dimana teknik *column generation* akan digunakan untuk mencari solusi dari model relaksasinya. Untuk mengenerate pola pemotongan baru, dibangun sub model yang didasari oleh metode *stripe*. Untuk mendapatkan solusi bilangan bulat, dilakukan langkah-langkah berikut. Solusi model relaksasi kita bulatkan ke bawah, kemudian hitung kekurangan demand setiap final. Selanjutnya kita bangun sebuah algoritma tambahan yang digunakan untuk memenuhi kekurangan demand. Solusi optimal adalah gabungan dari pembulatan ke bawah solusi model relaksasi ditambah solusi dari model tambahan ini.

Keywords: Cutting stock, integer programming, column generation.

1. Pendahuluan

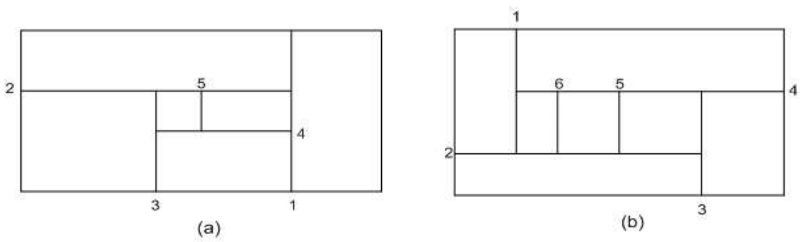
Penelitian ini membahas suatu permasalahan yang sering dijumpai dalam bidang industri, seperti industri pengolahan kaca, industri pengolahan kulit dan industri pembuatan kapal, dalam meminimumkan kebutuhan bahan baku. Bahan baku yang tersedia umumnya berbentuk persegi yang harus dipotong-potong menjadi bentuk-bentuk yang lebih kecil yang disebut *final*. Setiap *final* mempunyai jumlah permintaan (*demand*) tertentu. Masalah pemotongan bahan baku ini dikenal dengan sebutan masalah *cutting stock*. Jika *final* yang ada berbentuk persegi panjang, maka masalah *cutting stock* tersebut disebut masalah *cutting stock* dua dimensi.

Saat ini, di sebagian besar industri, masalah pemotongan bahan baku masih dikerjakan secara manual hanya mengandalkan pengalaman operator dalam menentukan pola pemotongan (*cutting pattern*). Hasil pemotongan dengan cara manual ini tidak efisien karena menghasilkan sisa bahan baku yang banyak. Karena mahalnya harga bahan baku, maka perlu dicari suatu solusi masalah *cutting stock*. Solusi ini nantinya diharapkan dapat mengurangi ongkos produksi.

Masalah di atas dapat diformulasikan sebagai masalah *integer programming*. Metode konvensional yang ada tidak mungkin digunakan untuk mencari solusi karena sangat sulit untuk mencari semua kemungkinan *cutting pattern* yang jumlahnya sangat banyak. Gilmore dan Golmory [5,6] telah menemukan sebuah teknik untuk menyelesaikan kesulitan tersebut, yaitu teknik *column generation*. Dengan menggunakan teknik ini, kita hanya perlu beberapa *cutting pattern* saja sebagai inisialisasi. *Cutting pattern* baru yang dapat memaksimalkan *reduced cost* dari *master problem* dibangkitkan dengan menyelesaikan *sub problem* dari masalah *Knapsack*. *Cutting pattern* baru ini akan terus dibangkitkan sampai memperoleh hasil optimal. Teknik-teknik penyelesaian lainya dikemukakan oleh Hifi [7,8] yang mengkombinasikan *depth first search* menggunakan strategi *hill-climbing* dan program dinamik.

Penerapan teknik *column generation* untuk menyelesaikan Masalah cutting stock dua dimensi dengan tipe pemotongan *guillotine* dan bahan baku tunggal telah dibahas dalam K. Novianingsih dkk [9]. Tipe pemotongan *guillotine* adalah suatu teknik pemotongan dimana setiap pemotongan yang dilakukan akan selalu menghasilkan dua persegi panjang. Fokus dari penelitian ini adalah mencari solusi dari perluasan masalah dalam K. Novianingsih dkk [9], yaitu masalah *cutting stock* dua dimensi dengan tipe pemotongan *guillotine* dan jenis bahan baku yang tersedia lebih dari satu. Tiap jenis bahan baku mempunyai harga tertentu. Diasumsikan bahwa orientasi pemotongan adalah tetap, yaitu final berukuran $l\times w$ tidak dapat dipotong menjadi final berukuran $w\times l$ Selain itu, terdapat batasan kapasitas dari mesin pemotongan, yaitu batas atas dari banyaknya tiap jenis bahan baku yang dapat dipotong oleh mesin pemotong pada periode waktu tertentu. Diasumsikan bahwa setiap batasan kapasitas mesin tidak saling bergantung untuk setiap tipenya. Solusi dari masalah ini adalah *cutting pattern* yang menghasilkan ongkos produksi paling minimum. Model perluasan untuk masalah *cutting stock* satu dimensi dapat dilihat di Bisschop [1].

Tujuan dari penelitian ini terinspirasi dari masalah *cutting stock* di PT. PAL Indonesia dalam meminimumkan kebutuhan lempengan baja yang diperlukan untuk mengkonstruksi kapal laut. Final yang ada berbentuk bidang-bidang yang tidak teratur. Penyelesaian masalah ini akan lebih sulit dari pada masalah dalam penelitian ini, tetapi diharapkan bahwa hasil dari penelitian ini dapat diimplementasikan untuk menyelesaikan masalah *cutting stock* di PT. PAL .



Gambar 1: (a) Tipe Pemotongan *Guillotine*. (b) Tipe Pemotongan *Non Guillotine*

2. Model Matematika

Misal terdapat m jenis bahan baku berbentuk persegi panjang, masing-masing berukuran $L_i \times W_i$. Terdapat n jenis *final* dengan ukuran $l_i \times w_i$ dengan permintaan (*demand*) masing-masing d_i. Dimisalkan pula bahwa P adalah himpunan *cutting pattern* dan didefinisikan a_{ijk} sebagai banyaknya *final* f_i yang diperoleh jika persegi panjang jenis k dipotong menjadi *cutting pattern* j. Jika k_k menyatakan batasan kapasitas dari bahan baku jenis k dan c_k adalah harga bahan baku jenis k per-unit, dengan mendefinisikan x_{jk} sebagai banyaknya bahan baku jenis k yang dipotong dengan *cutting pattern* j, masalah perluasan *cutting stock* dua dimensi dapat dirumuskan sebagai model program linear berikut:

$$\begin{array}{lll} \textbf{Meminimumkan:} & \sum_j \sum_k c_k x_{jk} & \\ \textbf{Berdasar:} & \sum_j \sum_k a_{ijk} x_{jk} \ge d_i & i = 1,2,\ldots,n \\ & \sum_j x_{jk} \le k_k & k = 1,2,\ldots,m \\ & x_{jk} \ge 0 \text{ integer} & \forall j,k \end{array} \quad (1)$$

Metode konvensional yang biasa kita gunakan untuk mencari solusi masalah program linear, tidak dapat langsung kita terapkan untuk mencari masalah (1). Hal ini karena tidaklah mudah untuk mencari semua kemungkinan *cutting pattern*. Dalam penelitian ini, kita akan menerapkan teknik *Column Generation* untuk menyelesaikan model program linear relaksasi dari (1). Selanjutnya, model (1) kita sebut sebagai *master problem*.

Teknik *Column Generation* dikenalkan oleh Gilmore dan Gomory [5,6] untuk menyelesaikan masalah *cutting stock* satu dimensi. Teknik ini terbukti efektif untuk menyelesaikan masalah program linear yang matriks koefisiennya tidak mudah untuk ditentukan. Teknik ini didasari oleh metode simpleks yang direvisi (revised simplex method), dimana kita dapat menetukan solusi fisibel basis dari $(n+m) \times (n+m)$ submatriks dari matriks koefisien yang nonsingular. Submatriks ini disebut matriks basis, dan dinotasikan dengan **B**. Untuk mencari matriks **B** dari masalah (1), kita cukup mencari $(n \times n)$ submatriks yang merepresentasikan n buah cutting pattern yang berbeda untuk setiap bahan baku jenis k. Submatriks $(n \times n)$ ini kita beri notasi $\mathbf{D_k}$. Cutting pattern ini tidaklah sulit untuk dicari. Sebagai contoh, untuk setiap jenis bahan baku, pilih sebuah matriks diagonal orde n dimana setiap entri diagonal ke-i berisi jumlah final i maksimum yang mungkin ditempatkan pada sebuah bahan baku. $m \times (n+m)$ submatriks sisanya adalah matriks yang setiap entrinya bernilai 1. Setelah menetukan matriks **B**, solusi basis fisibel diperoleh dari relasi $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, dimana $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} d_i \\ \text{---} \\ k_k \end{bmatrix}$.

Untuk menetukan apakah solusi yang diperoleh optimal atau tidak, untuk setiap jenis bahan baku k, kita generate sebuah kolom baru $\mathbf{y^k}$ dengan elemen y_i^k, i=1,2, . . ., n. Misal π_k adalah *shadow price* yang berasosiasi dengan kapasitas dari konstrain untuk bahan baku jenis k dimana π_k adalah elemen ke k dari matriks $\mathbf{cP^{-1}}$ dengan **c** adalah matrik baris berdimensi m yang entrinya adalah ongkos perunit setiap bahan baku dan **P** adalah matriks diagonal berorde m yang semua entrinya bernilai 1. *Reduced cost* yang berasosiasi dengan basis **B** untuk setiap bahan baku jenis k adalah

$$c_k - \pi_k - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^k \ .$$

Shadow price λ dengan elemen λ_i, i=1,2,…,n adalah $\lambda=\mathbf{1_m D_k}^{-1}$ adalah *shadow price* yang berasosiasi dengan masing-masing permintaan *final i*, dimana $\mathbf{1_m}$ adalah matriks baris berdimensi m yang semua entrinya bernilai 1. Kondisi optimal tercapai jika minimum reduced cost bernilai nonnegative. Jika minimum reduced cost bernilai negative, kolom baru $\mathbf{y^k}$ akan masuk sebagai basis. Kolom baru akan terus digenerate selama kondisi optimal *master problem* (1) belum tercapai.

3. Submodel untuk Men-*generate* kolom Baru

Kolom baru $\mathbf{y^k}$ yang dapat memperbaiki solusi basis fisibel $\mathbf{x_B}$ digenerate dengan menyelesaikan model integer programming, dimana solusi optimal akan menghasilkan fisibel cutting pattern dengan nilai *reduced cost* yang berasosiasi dengan $\mathbf{x_B}$ untuk setiap jenis bahan baku minimum. Dengan kata lain, *reduced cost* $c_k - \pi_k - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^k$ akan menjadi fungsi objektif . Pembatas dibangun sedemikian sehingga kolom baru $\mathbf{y^k}$ adalah *cutting pattern* yang fisibel.

Untuk membangun model matematika dari *cutting pattern* yang fisibel ini, penulis terinspirasi oleh teknik yang terdapat pada Hifi [7,8]. Teknik ini juga telah berhasil diterapkan untuk menyelesaikan masalah *cutting stock* dua dimensi dengan bahan baku tunggal pada K.Novianingsih dkk [9]. Untuk setiap bahan baku jenis *k*, kita definisikan sebuah *stipe* yang berasosiasi *final* f_i, yaitu subpersegi panjang hasil pemotongan secara vertikal. *Stipe* ini mempunyai ukuran panjang L^k dan lebar w^k_i. Pada *stipe* ini kita dapat menempatkan *final* f_i dan *final* f_j dimana $w^k_i \le w^k_j$. Untuk setiap *final* f_i dan f_j dengan $w^k_i = w^k_j$, $i \neq j$ hanya satu stripe yang dipandang.

Pada setiap stipe dari bahan baku jenis *k*, kita akan dapatkan sebanyak $\left\lfloor \frac{W^k}{w_i^k} \right\rfloor$ buah stripe. Karena kita mempunyai *n final*, maka jumlah maksimum *stipe* yang mungkin ada sebanyak $S^k = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{W^k}{w_i^k} \right\rfloor$.

Untuk $s^k = 1,2,3,\ldots,S^k$,

1. Misal $\overline{w}_s^k$ adalah lebar *stripe* ke *s* dari bahan baku jenis *k*.
2. Definisikan variabel z_s^k dimana $z_s^k = 1$ jika *stripe* ke *s* dari bahan baku jenis *k* terpilih dalam cutting pattern, $z_s^k = 0$ untuk yang lainnya.
3. Deinisikan $\theta_s^k = \{ i \mid i = 1,2,\ldots,n, w_i^k \le w_s^k \}$.
4. Untuk $i \in \theta_s^k$,definisikan variabel y_i^{sk} yang menyatakan banyaknya *final* f_i pada stripe *s* dari bahan baku jenis *k*.

Berdasarkan definisi, banyaknya *final* f_i pada kolom baru y^k adalah $y^k = \sum_{s=1}^{S^k} y_i^{sk}$.

Karena meminimumkan $c_k - \pi_k - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^k$ ekuivalen dengan dengan memaksimumkan $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^k$, maka sub problem untuk mengenerate *cutting pattern* baru adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\textbf{Memaksimumkan:}\quad & \sum_{s=1}^{S^k} \lambda_i \sum_{i=1}^{n} y_i^{sk} \\
\textbf{Berdasar:}\quad & \sum_{s=1}^{S^k} \overline{w}_s^k z_s^k \le W_k \\
& \sum_{i \in \theta_s^k} l_i y_i^{sk} \le L_k z_s^k, \forall s \\
& y_i^{sk} \text{ integer non-negatif}, \forall \text{k}, \forall\, i \in \theta_s^k
\end{aligned}
\tag{2}
$$

4. Solusi Bilangan Bulat

Teknik *Column Generation* yang telah dijelaskan pada subbab 3 digunakan untuk menyelesaikan program linear relaksasi (1). Solusi optimal yang diperoleh dari (1) dapat berupa bilangan yang tidak bulat. Untuk memperoleh solusi bilangan bulat, digunakan algoritma heuristic yang disebut *Largest In Least Empty* (LILE). Algoritma ini diterapkan untuk memenuhi kekurangan permintaan. Langkah-langkah dari algoritma LILE adalah sebagai berikut:

1. Solusi Optimal hasil (1) kita bulatkan kebawah, kemudian hitung kekurangan permintaan.
2. Urutkan final berdasar final dengan kekurangan permintaan yang paling banyak ke final dengan kekurangan permintaan paling sedikit.
3. Tempatkan final dengan kekurangan permintaan terbesar pada bahan baku yang mempunyai harga per-unit paling kecil yang dapat memuat final ini sebanyak mungkin. Jika masih ada final yang belum ditempatkan, tempatkan final tersebut pada bahan baku tambahan.
4. Lanjutkan proses ini sampai semua kekurangan permintaan final terpenuhi.

5. Kesimpulan

Teknik *Column Generation* dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan model perluasan dari masalah cutting stock dua dimensi dengan tipe pemotongan *Guillotine* dan orientasi pemotongan tetap. Sub model yang digunakan untuk mengenerate kolom baru didasari pada metode *stripe*. Solusi Bilangan bulat diperoleh dari pembulatan kebawah solusi optimal hasil model linear relaksasi ditambah dengan bahan baku tambahan yang dibutuhkan untuk memenuhi kekurangan permintaan berdasar algoritma LILE.

6. Diskusi

Algoritma diatas sederhana, tetapi tidak selalu memberikan solusi yang optimal. Untuk menjamin bahwa kita akan mendapatkan solusi optimal, perlu dibangun model integer programming yang akan digunakan untuk mencari jumlah bahan baku tambahan yang dibutuhkan untuk memenuhi kekurangan permintaan.

7. Daftar Pustaka

[1] Bisschop, J.J, (1999), AIMMS - *Optimization modeling*, Paragon Decision Tecnology B.V, Nether- lands.

[2] Carla, A, Nerau, M, Cristina, M, Two-stage and constrained two-dimensional cutting stock problems, *VI Oficiana de Problemas de Corte e Empacotamento* 9-10, 195-220.

[3] Chv´atal, V, (1983), *Linear programming*, W.H. Freeman and company, New York.

[4] Fayard, D, Zissimopoulus, V, (1995), An approximation algorithm for solving unconstrained two-dimensional knapsack problems, *European Journal of Operational Research 84*, 618-632.

[5] Gilmore, P.C, Gomory, R.E, (1961), A linear programming approach to the cutting-stock problem, part i, *Journal of Operation Research* 9, 849-859.

[6] Gilmore, P.C, Gomory, R.E, (1963), A linear programming approach to the cutting-stock problem, part ii, *Journal of Operation Research 11*, 863-888.

[7] Hifi, M, Zissimopoulus, M, (1996), A recursive exact algorithm for weighted two-dimensional guillotine cutting problems, *European Journal of Operational Research 91*, 553-564.

[8] Hifi, M, (2004), Dynamic programming and hill-climbing techniques for constrained two- dimensional cutting stock problems, *Journal of Combinatorial Optimization 8*, 65-84.

[9] K. Novianingsih, R. Hadianti, S. Uttunggadewa, (2007), Column Generation Technique for Solving Two-Dimensional Cutting Stock Problems: method of stripe approach, *Journal of The Indonesian Mathematical Society* (*MIHMI)13*, 161-172.