MINOR DAN KOFAKTOR

Definisi:

Jika A adalah matriks kuadrat, maka minor a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} adalah submatriks A yang didapat dengan jalan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke – j.

Kofaktor a_{ij} dinyatakan oleh C_{ij} didefinisikan sebagai: $C_{ij} = (-1)^{I+j}.M_{ij}$

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$, $C_{11} = (-1)^{1+1}.M_{11} = 16$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$, $C_{32} = (-1)^{3+2}.M_{32} = -26$

Determinan suatu matriks kuadrat A dapat juga dihitung dengan menggunakan **ekspansi kofaktor** sepanjang baris/kolom.

Teorema:

Determinan matriks A yang berukuran n x n dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil kali yang dihasilkan, yaitu untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$, maka

$$\text{Det}(A) = a_{1j}.C_{1j} + a_{2j}.C_{2j} + \ldots + a_{nj}.C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke j)

dan

$$\text{Det}(A) = a_{i1}.C_{i1} + a_{i2}.C_{i2} + \ldots + a_{in}.C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke i)

Contoh: hitunglah det(A) dimana $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

Jawab: jika det(A) dihitung menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom 1, maka

Det (A) = $0.C_{11}+1.C_{21}+0.C_{31}+0.C_{41} = C_{21} = (-1)^{2+1}.M_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -18$

Definisi:

Jika A sebarang matriks n x n dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij}, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

dinamakan ***matriks kofaktor A***. Transpose matriks ini dinamakan ***adjoin A*** ditulis adj(A)

contoh: A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

kofaktor A adalah:

$C_{11} = 12$ $C_{12} = 6$ $C_{13} = -16$

$C_{21} = 4$ $C_{22} = 2$ $C_{23} = 16$

$C_{31} = 12$ $C_{32} = -10$ $C_{33} = 16$

Sehingga matriks kofaktornya adalah: $\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$

Dan adjoin A adalah: Adj(A) = $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$

Latihan:

1. misal A = $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, Carilah semua minor dan kofaktornya.

2. misalkan A = $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 14 & 2 \end{bmatrix}$, Carilah:

   a. M_{13} dan C_{13} b. M_{23} dan C_{23} c. M_{21} dan C_{21}

3. Dari matriks pada no.2 hitunglah det(A) dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang

   a. baris pertama b. kolom pertama c. baris kedua

4. Untuk matriks pada no.2, carilah:

   a. matriks kofaktor A b. Adj(A)

5. hitunglah determinan matriks berikut menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris / kolom pilihan anda.

   a. A = $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ b. B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k \\ k^2 & k^2 & k^2 \end{bmatrix}$

   c. C = $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 14 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$