KOMBINATORIAL

Kombinatorial adalah cabang matematika yang mempelajari pengaturan objek – objek. Solusi yang ingin kita peroleh dari kombinatorial ini adalah jumlah cara pengaturan objek – objek didalam kumpulanya. Kombinatorial didasarkan pada hasil yang diperoleh dari suatu percobaan (*experiment*) atau kejadian (*event*). Percobaan adalah proses fisis yang hasilnya dapat diamati. Contoh:

1. Melempar dadu.
2. Melempar koin uang logam.
3. Memilih 5 orang wakil dari 100 orang.

<u>KAIDAH DASAR PERHITUNGAN</u>

1. Kaidah Dasar Penjumlahan (Rule of Sum) / ROS

   Andaikan terdapat n himpunan A_i, I = 1,2,3 . . . , n. Andaikan juga cacah banyaknya anggota himpunan A_i adalah n_i dan $A_i \cap A_j = \emptyset$, maka banyaknya anggota himpuan A_1 atau A_2 atau . . . atau A_n adalah ($n_1 + n_2 + . . . + n_n$). Dengan kata lain $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| =$ ($n_1 + n_2 + . . . + n_n$)

   Contoh:

   Dalam Perpustakaan terdapat 10 buku Matematika, 25 buku Statistik dan 5 buku social. Berapa cara yang dapat dilakukan untuk mengambil 1 buku.

   Jawab:

   Banyaknya cara mengambil 1 buku Matematika ada 10 cara.

   Banyaknya cara mengambil 1 buku Statistik ada 25 cara.

   Banyaknya cara mengambil 1 buku Sosial ada 5 cara.

   Jadi, banyaknya cara untuk mengambil 1 buku (sembarang) ada: 10 + 25 + 5 = 40 cara.

2. Kaidah Dasar Perkalian (Rule of Product) / ROP

   Andaikan suatu prosedur dapat diselesaikan dengan k tahap.

Tahap 1 dapat diselesaikan dengan n_1 cara.

Tahap 2 dapat diselesaikan dengan n_2 cara.

.

.

.

Tahap k dapat diselesaikan dengan n_k cara.

Maka prosedur tersebut dapat diselesaikan dengan : $n_1 \,.\, n_2 \,.\,.\,.\, n_k$ cara

Contoh: Pada soal no.1

Berapa banyaknya cara untuk mengambil 3 buah buku masing – masing 1 buku Matematika, 1 buku Statistik dan 1 buku social.

Jawab:

Prosedur untuk mengambil 3 buah buku yang berbeda dapat diselesaikan dengan 3 tahap.

Tahap 1: Mengambil 1 buku Matematika dapat dilakukan dengan 10 cara.

Tahap 2 : Mengambil 1 buku Statistik dapat dilakukan dengan 25 cara.

Tahap 3 : mengambil 1 buku Sosial dapat dilakukan dengan 5 cara.

Dengan prinsip ROP, banyaknya cara utnuk mengambil 3 buah buku yang berbeda ada: 10.25.5 = 1250 cara.

Prinsip ROP menyatakan bahwa suatu percobaan dilakukan secara bersamaan sedangkan ROS percobaan dilakukan tidak bersamaan.

Contoh soal:

1. Sekelompok mahasiswa terdiri dari 4 orang pria dan 3 orang wanita. Berapa cara memilih 1 orang yang mewakili kelompok tersebut (tidak perduli pria atau wanita).

   Jawab:

   Ada 4 cara untuk memilih pria dan 3 cara untuk memilih satu wakil wanita, maka banyaknya cara untuk memilih 1 orang wakil adalah 4 + 3 = 7 cara.

2. Suatu seri dari mikrokomputer terdiri dari 5 karakter masing – masing 2 huruf yang diikuti oleh angka (huruf besar dan kecil tidak dibedakan). Berapa cara nomor seri yang dapat dibuat.

   Jawab:

   Banyaknya huruf ada 26 dan banyaknya angka ada 10. Kemungkinan no seri yang dapat dibuat ada:

$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 676000$ cara

3. Berapa banyak bilangan 4 digit yang tidak mengandung angka yang berulang

   jawab:

   banyaknya angka ada 10. Banyaknya bilangan 4 digit yang dapat dibentuk jika tidak ada angka yang diulang ada: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

4. Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 sampai 9999 yang semua digitnya berbeda.

   Jawab:

   Posisi satuan : ada 5 kemungkinan

   Posisi ribuan : ada 8 kemungkinan

   Posisi ratusan : ada 8 kemungkinan

   Posisi puluhan : ada 7 kemungkinan

   Jadi, banyaknya bilangan ganjil antara 1000 – 9999 ada: $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$ buah

PRINSIP INKLUSI – EKSLUSI

Contoh:

1. Berapa banyak 8 bit string yang dimulai dari 11 atau berakhir 11

   Jawab:

   Misal A = Himpunan byte yang dimulai 11

   B = Himpunan byte yang diakhiri 11

   C = Himpunan byte yang dimulai dengan 11 dan diakhiri 11

   Jumlah byte yang dimulai dengan 11 ada $2^6 = 64$ (2 posisi pertama sudah diisi), sehingga $|A| = 64$.

   Jumlah byte yang diakhiri dengan 11 ada : $2^6 = 64$, sehingga $|B| = 64$.

   Jumlah byte yang berawal dan berakhir dengan 11 ada : $2^4 = 16$, sehingga $|A \cap B| = 16$. dengan prinsip inklusi – Ekslusi maka jumlah byte yang dimulai dengan 11 atau diakhiri 11 ada:

   $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 64 + 64 – 16 = 112$ buah.

2. Seorang professor mempunyai 25 mahasiswa Kalkulus, 31 mahasiswa stastistik dan 13 mahasiswa yang mengikuti keduanya. Berapa jumlah mahasiswa professor.

   Jawab:

   Misal A = himpunan mahasiswa kalkulus

   B = himpunan mahasiswa Statistik

$|A| = 25$, $|B| = 31$, $|A \cap B| = 13$ sehingga total mahasiswa ada:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 31 – 13 = 43$

PERMUTASI

Definisi 1:

Untuk $n \geq 0$, n factorial yang ditulis dengan n! didefinisikan sebagai:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Definisi 2:

Andaikan terdapat n sembarang objek. Akan diadakan <u>pengaturan</u> r objek dengan $1 \leq r \leq n$. Banyaknya permutasi ditulis dengan: nPr atau P(n,r) didefinisikan sebagaikan:

$$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n - (r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Bentuk umum: untuk n = r, P(n,n) = n!

Dalam permutasi hal yang perlu diperhatikan:

- Pengaturan
- Urutan

Contoh:

1. Perhatikan kata “KOMPUTER”, akan diatur huruf – huruf dalam kata tersebut.
   a. Berapa banyak pengaturan huruf jika semua huruf pada kata tersebut digunakan.
   b. Berapa banyak pengaturan jika hanya diambil 4 huruf.

   Jawab:

   a. n = 8, r = 8 maka P(8,8) = 8!
   b. n = 8, r = 4 maka $P(8,4) = \frac{8!}{(8-4)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ cara.
2. Tiga buah ujian dilakukan dalam satu periode 6 hari. Berapa banyak pengaturan jadwal yang dapat dilakukan sehingga tidak ada 2 ujian atau lebih yang dilakukan pada hari yang sama.

   Jawab:

   n = 6, r = 3 maka $P(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6.5.4 = 120$ cara

KOMBINASI

Andaikan terdapat n objek berbeda, akan <u>dipilih</u> r objek dengan $1 \leq r \leq n$ (tampa memperhatikan urutan). Banyaknya kombinasi disajikan dengan nCr atau C(n,r)

Andaikan urutan diperhatikan, banyaknya pengaturan r objek dari n objek adalah P(n,r).

Dari r objek,urutan tidak diperhatikan, banyaknya pengaturan adalah P(r,r) = r!

Jadi,

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Contoh:

1. Sekelompok anak terdiri dari 4 anggota. Berapa cara memilih 2 anak dari 4 anak tersebut.

   Jawab:

   n = 4, r = 2 maka $C(4,2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!.2!} = 6$ cara

2. string biner panjangnya 32 bit disusun oleh digit 1 atau 0. berapa banyak string biner yang tepat berisi 7 buah bit 1

   Jawab:

   Kasus diatas analog dengan terdapat 7 bola yang akan dimasukan ke 32 kotak. Banyaknya string biner yang terbentuk adalah C(32,7).

3. Sekelompok anak terdiri dari 6 anak laki – laki dan 5 anak perempuan . Akan dipilih 3 orang anak dengan ketentuan 2 anak laki – laki dan 1 anak perempuan. Berapa banyak cara yang dapat dilakukan untuk memilih 3 orang tersebut.

   Jawab:

   Terdapat 2 prosedur pemilihan:

   - Pemilihan 2 anak laki – laki
   - Pemilihan 1 anak perempuan

   Banyaknya cara memilih 2 anak laki-laki dari 6 anak ada: C(6,2) cara.

   Banyaknya cara memilih 1 anak perempuan dari 5 anak ada: C(5,1) cara.

   Jadi, banyaknya cara memilih 2 anak laki – laki dan 1 anak perempuan:

   $$C(6,2).C(5,1) = 15 . 5 = 75 \text{ cara}$$

4. Tiga buah apartemen A, B, C disewakan ke mahasiswa. Tiap apartemen dapat menampung 3 atau 4 orang . Berapa banyak cara menyewakan apartemen kepada 10 orang mahasiswa.

   Jawab:

   Ada 3 kemungkinan:

   - Apartemen A untuk 4 orang, apartemen B,C untuk 3 orang.
     Banyaknya cara: C(10,4). C(6,3) . C(3,3)
   - Apartemen A untuk 3 orang, B untuk 4 orang dan C untuk 3 orang
     Banyaknya cara: C(10,3) . C(7,4) . C(3,3)
   - Apartemen A,B untuk 3 orang dan C utnuk 4 orang
     Banyaknya cara : C(10,3) . C(7,3) . C(3,3)

   Total seluruh cara: C(10,4). C(6,3) . C(3,3) + C(10,3) . C(7,4) . C(3,3) + C(10,3) . C(7,3) . C(3,3)

5. Berapa banyak cara 8 orang disusun dalam suatu lingkaran.

   Jawab:

   Untuk menyusun 8 orang dalam lingkaran, maka 1 orang harus tetap ditempatnya, sedang yang lain berpindah, sehingga banyaknya cara ada: 7!

PERLUASAN PERMUTASI DAN KOMBINASI

Andaikan terdapat n objek dengan:

n_1 objek pertama

n_2 objek kedua

.

.

.

n_k objek ke-k

dengan $n = n_1 + n_2 + . . . + n_k$,maka banyaknya permutasi dari n objek tersebut adalah:

Objek pertama diatur dengan : $C(n,n_1)$ cara

Objek kedua diatur dengan : $C(n-n_1,n_2)$ cara

Objek ketiga diatur dengan : $C(n-n_1-n_2,n_3)$ cara

.

.

.

Objek ke-k diatur dengan : $C(n-n_1-n_2-\ldots-n_k,n_k)$

Dengan prinsip ROP, pengaturan n objek dapat dilakukan dengan:

$C(n,n_1).\ C(n-n_1,n_2).\ C(n-n_1-n_2,n_3)\ .\ .\ .\ C(n-n_1-n_2-\ldots-n_k,n_k) = \dfrac{n!}{n_1!.n_2!\ldots n_k!}$

Jadi, Banyaknya permutasi dengan perulangan: $\dfrac{n!}{n_1!.n_2!\ldots n_k!}$

Contoh:

1. Berapa banyak string yang dapat dibentuk dari kata “MISSISSIPPI”

   Jawab:

   Banyaknya huruf M = 1, huruf I = 4, huruf S = 4, hurup P = 2 sehingga n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11.

   Jadi jumlah string yang dapat dibentuk = $\dfrac{11!}{1!.4!.4!.2!}$ = 34650 buah

2. Berapa banyak cara membagi 8 buah buku yang berbeda kepada 3 orang mahasiswa jika masing-masing Billy mendapat 4 buku, Andy dan Toni mendapat 2 buku.

   Jawab:

   $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, $n = 4 + 2 + 2 = 8$

   Banyaknya cara membagi buku = $\dfrac{8!}{4!.2!.2!}$ = 420 cara.

KOMBINASI DENGAN PERULANGAN

Misal terdapat r buah bola yang warnanya sama dan n buah kotak (r > n).

(i) jika masing –masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu kotak maka banyaknya cara memasukan bola ke dalam kotak ada C(n,r).

(ii) Jika masing – masing kotak tidak ada batasan jumlah bola, maka jumlah cara memasukan bola tersebut ada C(n + r – 1 , r) atau C(n + r – 1 , n – 1).

Contoh:

1. Persamaan: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ dengan x_i bilangan bulat nonnegatif. Berapa jumlah kemungkinan solusinya.

   Jawab:

Kasus diatas analog dengan 12 bola kedalam 4 kotak, maka banyaknya cara ada: $C(4 + 12 – 1, 12) = C(15,12) = 455$ buah.

2. Tiga buah dadu dilempar. Berapa banyak hasil yang berbeda yang mungkin.

   Jawab:

   $n = 3$, $r = 6$ sehingga banyaknya hasil yang mungkin ada:

   $C(3 + 6 – 1 , 6) = C(8,6) = 56$ buah.