

KOEFISIEN BINOMIAL

Teorema Binomial adalah suatu cara untuk menjabarkan bentuk pangkat $(x+y)^n$, n bilangan bulat. Teori Binomial menyatakan:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C(n,k)x^{n-k}y^k$$

Koefisien untuk $x^{n-k}y^k$ yaitu suku ke- $(k+1)$ adalah $C(n,k)$. Bilangan $C(n,k)$ disebut *Koefisien Binomial*.

Contoh:

1. Jabarkan bentuk $(x + y)^3$

Jawab:

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= \sum_{k=0}^3 C(3,k)x^{3-k}y^k \\ &= C(3,0)x^{3-0}.y^3 + C(3,1)x^{3-1}.y^1 + C(3,2)x^{3-2}.y^2 + C(3,3)x^{3-3}.y^3 \\ &= 1. x^3.y + 3.x^2.y^2 + 3. x.y^2 + 3.1.y^3 \\ &= x^3.y + 3.x^2.y^2 + 3. x.y^2 + 3y^3\end{aligned}$$

2. Tentukan suku keempat dari $(x - y)^5$

Jawab:

Suku ke-4, maka $k = 3$ sehingga suku ke - 4 adalah : $C(5,3).x^{5-3}.(-y)^3 = -10x^2y^3$

3. Tunjukkan bahwa $\sum_{k=0}^n C(n,k) = 2^n$.

Jawab:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C(n,k)x^{n-k}y^k$$

Ambil $x = y = 1$ didapat:

$$(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n C(n,k)1^{n-k}1^k = \sum_{k=0}^n C(n,k)$$

SOAL LATIHAN

1. Jabarkan:

- a. $(x - 2y)^5$
- b. $(2x + y)^5$
- c. $(3x - 2y)^4$
- d. $(5 - 4x)^6$

2. Tentukan koefisien dari x^5y^3 dari:

- a. $(x - 2y)^8$
- b. $(2x + y)^8$
- c. $(x + y)^8$

3. Buktikan:

- a. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot C(n, k) = 0$
- b. $\sum_{k=0}^n 2^k \cdot C(n, k) = 3^n$

FUNGSI PEMBANGKIT

(GENERATING FUNCTIONS)

Andaikan terdapat barisan $\{a_i\}$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Suatu fungsi $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ disebut *fungsi pembangkit* dari barisan

$\{a_i\}$. Contoh:

1. $f(x) = e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$\therefore e^x$ adalah fungsi pembangkit dari barisan $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots$

2. $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$\therefore \frac{1}{1-x}$ adalah fungsi pembangkit dari barisan 1,1,1,1,...

3. $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \Rightarrow f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$\therefore \frac{1}{(1-x)^2}$ adalah fungsi pembangkit dari barisan 1,2,3,4,...

4. Tentukan fungsi pembangkit dari barisan 1,1,1,1,1

Jawab:

fungsi pembangkit dari barisan 1,1,1,1,1 adalah $f(x) = 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4$

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) - (x^5 + x^6 + x^7 + \dots) \\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) - x^5(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{x^5}{1-x} \\ &= \frac{1-x^5}{1-x} \end{aligned}$$

\therefore fungsi pembangkit dari barisan 1,1,1,1,1 adalah $f(x) = \frac{1-x^5}{1-x}$

5. Berapa banyak solusi dari persamaan: $a + b = 13$, $3 \leq a \leq 8$, $6 \leq b \leq 9$ dengan a dan b bilangan bulat.

Jawab:

Dengan menggunakan fungsi pembangkit maka masalah diatas analog dengan mencari koefisien pangkat 13 dari:

$$(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8) \cdot (y^6 + y^7 + y^8 + y^9)$$

suku yang memuat pangkat 13 adalah: x^4y^9 , x^5y^8 , x^6y^7 , x^7y^6 .

Jadi banyaknya penyelesaian ada 4.

SOAL LATIHAN

1. Carilah barisan yang dibangkitkan oleh fungsi pembangkit berikut:

a. $G(x) = (1+x)^3$

d. $G(x) = \frac{5}{1-3x}$

b. $G(x) = (x^2 + 1)^4$

e. $G(x) = \frac{1}{1+x}$

c. $G(x) = (2+x)^4$

2. Carilah fungsi pembangkit dari barisan berikut:

a. 3,3,3,3,3,...

b. 1,4,8,16,32,...

c. 1,4,16,64

d. 0,1,0,1,0,1,...

e. 1,3,9,27,81,243

3. Carilah banyaknya penyelesaian dari persamaan: $a + b + c = 4$, $a, b, c \geq 0$.