

KALKULUS PROPOSISI DASAR-DASAR LOGIKA

Ilmu logika berhubungan dengan kalimat-kalimat (argumen) dan hubungan-hubungan yang ada pada kalimat tersebut. Tujuannya adalah untuk memberikan aturan-aturan sehingga orang dapat menentukan apakah suatu kalimat bernilai benar. Kalimat yang dipelajari dalam logika bersifat umum, baik bahasa sehari-hari ataupun bukti matematika yang didasarkan atas hipotesa-hipotesa. Oleh karena itu, aturan-aturan didalamnya bersifat umum, tidak tergantung pada kalimat atau disiplin ilmu tertentu. Ilmu logika lebih mengarah kepada bentuk kalimat (sintaks) daripada arti kalimat itu sendiri (semantik).

A. Proposisi

Proposisi adalah kalimat yang bernilai benar atau salah tetapi tidak keduanya. Berikut adalah beberapa contoh proposisi:

- a. $2 + 2 = 4$
- b. 4 adalah bilangan prima
- c. Jakarta adalah ibukota negara Indonesia.

Kalimat-kalimat diatas adalah proposisi karena dapat diketahui nilai kebenarannya. Kalimat (a) dan (c) bernilai benar, sedangkan kalimat (b) bernilai salah.

Contoh berikut ini adalah kalimat-kalimat yang bukan merupakan proposisi:

- a. Dimana letak pulau Bali?
- b. $x + y = 2$
- c. Siapa namamu?
- d. $x > 5$

Tetapi pernyataan berikut ini

“Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap.”

dan

“ $x + y = y + x$ untuk setiap x dan y bilangan riil”

adalah proposisi, karena pernyataan pertama adalah cara lain untuk menyatakan bilangan genap dan pernyataan kedua walaupun tidak menyebutkan nilai x dan y , tetapi pernyataan tersebut benar untuk nilai x dan y berapapun. Bentuk proposisi yang mengandung peubah seperti contoh diatas akan dibahas pada materi Kalkulus predikat.

Proposisi biasanya dilambangkan dengan huruf kecil seperti $p, q, r, \dots$

Misalnya,

- p : 6 adalah bilangan genap.
- q : $2 + 3 = 7$
- r : $2 < 5$

B. Mengkombinasikan Proposisi

Satu atau lebih proposisi dapat dikombinasikan untuk menghasilkan proposisi baru. Operator yang digunakan untuk mengkombinasikan proposisi disebut **operator logika**. Operator logika dasar yang digunakan adalah **dan** (and), **atau** (or), dan **tidak** (not). Proposisi baru yang diperoleh dari pengkombinasian tersebut dinamakan proposisi majemuk (compound proposition). Dalam logika, dikenal 5 buah operator seperti dijelaskan dalam tabel berikut ini.

Simbol	Arti	Bentuk
$\sim$	Tidak / Not / Negasi	tidak . . .
$\wedge$	Dan / And / Konjungsi	. . . dan . . .
$\vee$	Atau / Or / Disjungsi	. . . atau . . .
$\Rightarrow$	Implikasi	Jika . . . maka . . .
$\Leftrightarrow$	Biimplikasi	. . . jika dan hanya jika . . .

Contoh:

Diketahui proposisi berikut ini:

p : Hari ini hujan

q : Murid-murid diliburkan dari sekolah

maka

$p \wedge q$: Hari ini hujan dan murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \vee q$: Hari ini hujan atau murid-murid diliburkan dari sekolah

$\sim p$: Hari ini tidak hujan

$p \wedge \sim q$: Hari ini hujan dan murid-murid tidak diliburkan dari sekolah

$\sim(\sim p)$: Tidak benar bahwa hari ini tidak hujan

$p \Rightarrow q$: Jika hari ini hujan, maka murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \Leftrightarrow q$: Hari ini hujan jika hanya jika murid-murid diliburkan dari sekolah

Latihan:

- Periksalah apakah kalimat-kalimat berikut merupakan proposisi atau bukan. Jika merupakan proposisi tentukan nilai kebenarannya.
 - 51 adalah bilangan prima ganjil.
 - Jumlah besar sudut segiempat adalah 180^0 .
 - Mudah-mudahan jawaban kita benar.
 - $1001 \leq 1001$
 - Integral adalah operasi invers dari differensial.
 - Turunan dari $f(x) = ax^n$ adalah $f'(x) = anx^{n-1}$
 - Cepat selesaikan latihan ini.
- Buatlah negasi dari setiap pernyataan berikut ini
 - $3 + 2 \leq 6$
 - Harga π adalah $\frac{7}{22}$
 - Dalam koordinat Cartesius: $(a,b) = (b,a)$
 - Paris tidak ada di pulau dewata.

3. Diketahui proposisi berikut ini:

p : Hari ini hujan

q : Hari ini dingin

Tentukan:

a. $q \vee \sim q$

b. $\sim p \wedge \sim q$

c. $\sim(\sim p)$

4. Diketahui proposisi berikut ini:

p : Pemuda itu tinggi

q : Pemuda itu tampan

Nyatakan dalam bentuk simbolik proposisi berikut.

a. Pemuda itu tinggi dan tampan

b. Pemuda itu tinggi tetapi tidak tampan

c. Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan

d. Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan

e. Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan

f. Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

C. Tabel Kebenaran

Tabel kebenaran adalah suatu tabel yang memuat nilai kebenaran proposisi majemuk. Nilai kebenaran dari proposisi majemuk ditentukan oleh nilai kebenaran proposisi-proposisi pembangunnya. Jika kalimat majemuk yang akan kita buat tabel kebenarannya memuat n proposisi tunggal, maka jumlah komposisi nilai kebenarannya ada 2^n . Berikut ini adalah tabel kebenaran dari operator-operator logika dasar.

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Contoh:

Buatlah tabel kebenaran proposisi berikut:

$$\sim(\sim p \vee \sim q)$$

Jawab:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F

Kadang-kadang kita harus membuat tabel kebenaran yang memuat lebih dari tiga pernyataan dalam bentuk yang cukup kompleks. Misal pernyataan berikut ini:

$$[p \Rightarrow (q \wedge r)] \wedge [\sim p \Rightarrow (\sim q \wedge \sim r)]$$

Untuk membuat tabel kebenaran diatas mula-mula kita buat kolom untuk p , kemudian berturut-turut q , r , $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $q \wedge r$, $\sim q \wedge \sim r$, $p \Rightarrow (q \wedge r)$, $\sim p \Rightarrow (\sim q \wedge \sim r)$ dan terakhir adalah kolom yang persis dengan pernyataan diatas. Ada cara yang cukup bagus untuk membuat tabel kebenaran agar tidak membutuhkan kolom yang terlalu banyak jumlahnya. Cara ini menuntut sedikit kemahiran, karena hasil akhir yang diharapkan yaitu nilai kebenaran pernyataan majemuk ditentukan oleh nilai kebenaran yang diwakili sebuah kolom tertentu. Sebagai contoh adalah tabel kebenaran untuk proposisi majemuk berikut:

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)$$

1	2	3	4	5	6	7	8
(p	^	q)	v	(r	^	~	q)
T	T	T	T	T	F	F	T
T	T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	T	F
T	F	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F	F	T
F	F	F	T	T	T	T	F
F	F	F	F	F	F	T	F

Kolom yang menyatakan nilai kebenaran proposisi majemuk diatas adalah kolom (4).