KALKULUS PREDIKAT

KALIMAT BERKUANTOR

A. PREDIKAT DAN KALIMAT BERKUANTOR

Dalam tata bahasa, predikat menunjuk pada bagian kalimat yang memberi informasi tentang subjek. Dalam ilmu logika, kalimat-kalimat yang memerlukan subjek disebut **Predikat**. Predikat biasanya disimbolkan dengan huruf. Perhatikan contoh berikut.

. . . terbang ke bulan.

. . . lebih tebal dari kamus.

Keduanya merupakan kalimat yang tidak lengkap. Agar menjadi kalimat yang lengkap, haruslah disubtitusikan suatu subjek dibagian depan kalimat. Misalnya, jika subjek "buku ini" disubtitusikan ke kalimat " . . . lebih tebal dari kamus", maka kalimat tersebut menjadi "Buku ini lebih tebal dari kamus".

Misalkan: p : terbang ke bulan

q : lebih tebal dari kamus

maka baik p maupun q adalah predikat-predikat. Untuk menyatakan perlunya subtitusi subjek (yang tidak diketahui), maka dituliskan sebagai p(x) dan q(y).

Salah satu cara mengubah predikat menjadi kalimat adalah dengan mensubtitusikan variabelnya dengan nilai-nilai tertentu. Misalkan p(x) : "x habis dibagi 5" dan x disubtitusikan dengan 35, maka p(x) menjadi kalimat benar karena 35 habis dibagi 5. Cara lain adalah dengan menambahkan **kuantor** pada kalimat. Kuantor adalah kata- kata seperti "beberapa", "semua" dan kata-kata lain yang menunjukan berapa banyak elemen yang dibutuhkan agar predikat menjadi benar.

Ada dua macam kuantor untuk menyatakan jumlah objek, yaitu:

1. Kuantor Universal

Kuantor universal menunjukan bahwa setiap objek dalam semestanya mempunyai sifat kalimat yang menyatakanya. Simbol untuk kuantor universal adalah "∀", dibaca "untuk semua" atau " untuk setiap". Misalkan p(x) : " x dapat mati" . Pernyataan "semua manusia dapat mati" ditulis dalam symbol: (∀x) p(x).

Pernyataan (∀x) p(x) bernilai benar jika hanya jika p(x) benar untuk semua p(x) dalam semestanya dan bernilai salah jika ada x yang menyebabkan p(x) salah.

2. Kuantor Eksistensial.

Kuantor Eksistensial menunjukkan bahwa diantara objek-objek dalam semestanya, paling sedikit ada satu objek (atau lebih) yang mempunyai sifat kalimat yang menyatakannya. Simbol kuantor eksistensial adalah "∃" dibaca "terdapat", "ada", "beberapa". Pernyataan $(\exists x)\ q(x)$ bernilai benar jika dan hanya jika ada paling sedikit satu x yang menyebabkan q(x) benar dan bernilai salah jika untuk semua x dalam semestanya, q(x) salah.

Variabel x dalam p(x) disebut variabel bebas karena jika x berubah maka nilai p(x) pada umumnya juga berubah. Sebaliknya, variabel x dalam $(\forall x)\ p(x)$ merupakan variabel terikat karena nilai $(\forall x)\ p(x)$ tidak lagi tergantung dari nilai x. Variabel x terikat oleh kuantor ∀.

LATIHAN

Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut:

1. (∀ bilangan real x) $x^2 \geq 0$.
2. (∀ bilangan real x) $x^2 \neq -1$
3. (∃ bilangan bulat m) $m^2 = m$
4. (∀bilangan bulat x) $x^2 - 2 \geq 0$
5. (∃ bilangan bulat x) $x^2 - 10x + 21 = 0$

B. NEGASI KALIMAT BERKUANTOR

Perhatikan kalimat : "Semua penumpang dalam bis yang bertabrakan selamat". Kalimat diatas bernilai salah jika ada penumpang yang meninggal.

Sebaliknya, kalimat "Ada penumpang yang selamat dalam kecelakaan bis" dikatakan salah jika semua penumpang meninggal dalam kecelakaan bis itu.

Secara umum, ingkaran kalimat: " semua x bersifat p(x)" adalah " Ada x yang tidak bersifat p(x)", dan ingkaran kalimat: " Ada x yang bersifat q(x)" adalah " Semua x tidak bersifat q(x)". Jadi

$$\sim [\ (\forall x)\ p(x)\ ] \equiv (\exists x) \sim p(x)$$

$$\sim [(\exists x)\ q(x)\ ] \equiv (\forall x) \sim q(x)$$

LATIHAN

Tentukan negasi dari pernyataan berikut:

1. Semua bilangan cacah adalah bilangan real.
2. Beberapa bilangan asli adalah bilangan rasional.
3. Tidak ada bilangan prima yang genap.
4. Semua mahasiswa tidak suka belajar.
5. Tidak ada guru yang senang menari.
6. $(\exists x)$ (cos x + sin x = 1).
7. $(\forall x)$ [$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$].

C. EMPAT PERNYATAAN DALAM LOGIKA TRADISIONAL

Logika tradisional menekankan empat tipe pernyataan yang diilustrasikan dalam pernyataan berikut:

Semua ikan paus adalah hewan menyusui.

Tak ada ikan paus yang termasuk hewan menyusui.

Beberapa ikan paus adalah hewan menyusui.

Beberapa ikan paus tidak termasuk hewan menyusui.

(a). Affirmatif Umum

Perhatikan pernyataan:

Semua ikan paus adalah hewan menyusui.

Pernyataan diatas dapat dinyatakan sebagai:

Untuk setiap x, jika x adalah ikan paus, maka x adalah hewan menyusui.

Misal:

$h(x)$: x adalah ikan paus.

$m(x)$: x adalah hewan menyusui.

maka pernyataan diatas dapat ditulis dengan simbol:

$(\forall x)\ (h(x) \Rightarrow m(x))$

(b). Negatif Umum

Perhatikan pernyataan:

Tidak ada ikan paus yang termasuk hewan menyusui.

Pernyataan diatas sama artinya dengan:

Semua ikan paus tidak termasuk hewan menyusui.

atau dapat dinyatakan sebagai:

Untuk setiap x, jika x adalah ikan paus, maka x bukan hewan menyusui.

Jadi, pernyataan diatas dapat ditulis dalam simbol berikut:

$(\forall x)\ (h(x) \Rightarrow \sim m(x))$

(c). Affirmatif khusus

Perhatikan kalimat:

Beberapa ikan paus adalah hewan menyusui.

Pernyataan ini dapat dinyatakan dalam ungkapan lain, yaitu:

Terdapat x, sedemikian sehingga x adalah ikan paus dan x adalah hewan meyusui.

Atau dinyatakan dalam simbol berikut:

$(\exists x)\ (h(x) \wedge m(x))$

(d). Negatif khusus

Peryataan:

Beberapa ikan paus bukan hewan menyusui

adalah contoh dari negatif umum.

Pernyataan diatas sama artinya dengan:

Terdapat x, sedemikian sehingga x adalah ikan paus dan x bukan hewan meyusui.

Atau dinyatakan dalam simbol berikut:

$(\exists x)\ (h(x) \wedge \sim m(x))$

D. PERNYATAAN YANG MENGANDUNG RELASI

Kalimat berkuantor yang telah dibahas dalam bagian sebelumnya dapat diperluas dengan menambah beberapa kuantor sekaligus pada kalimat yang sama. Perhatikan kalimat berikut:

(a). Semua pria mencintai wanita

Kalimat diatas sama artinya dengan

Untuk semua x, y , jika x adalah pria dan y adalah wanita, maka x mencintai y.

Misal: p(x) : x adalah pria

w(y) : y adalah wanita

r(x,y) : x mencintai y

maka simbol untuk pernyataan diatas adalah:

$(\forall x)\ (\forall y)\ [(\ p(x) \wedge w(y)\ ) \Rightarrow r(x,y)]$

(b). Semua wanita mencintai semua pria.

$(\forall x)\ (\forall y)\ [(\ p(x) \wedge w(y)\ ) \Rightarrow r(y,x)]$

(c). Beberapa pria mencintai beberapa wanita.

Kalimat diatas sama artinya dengan

Terdapatlah x dan y sedemikian sehingga x adalah pria dan y adalah wanita dan x mencintai y.

Simbol pernyataan diatas adalah:

$(\exists x)\ (\exists y)\ [\ p(x) \wedge w(y) \wedge r(x,y)]$

(d). Semua pria mencintai beberapa wanita

Kalimat diatas sama artinya dengan

Untuk setiap x, jika x adalah pria, maka terdapat y sedemikian sehingga y adalah wanita dan x mencintai y.

Simbol pernyataan diatas adalah

$(\forall x)\ [\ p(x) \Rightarrow (\exists y)\ (w(y) \wedge r(x,y))]$

(e). Beberapa pria mencintai semua wanita

Kalimat diatas sama artinya dengan

Terdapatlah x sedemikian sehingga x adalah pria dan untuk setiap y, jika y adalah wanita, maka x mencintai y.

Simbol pernyataan diatas adalah

$(\exists x)\ [\ p(x) \wedge (\forall y)\ (\ w(y) \Rightarrow r(x,y))]$

Kalimat diatas juga mempunyai arti yang sama dengan kalimat

Untuk semua x, jika x adalah wanita, maka terdapatlah y sedemikian sehingga y adalah pria dan y mencintai x.

yang mempunyai simbol

$(\forall x)\ [\ w(x) \Rightarrow (\exists y)\ (p(y) \wedge r(y,x))]$

LATIHAN

1. Misalkan P(x) : x adalah bilangan prima
   E(x) : x adalah bilangan genap
   A(x) : x adalah bilangan ganjil
   B(x,y) : x faktor y

Terjemahkan tiap-tiap simbol berikut kedalam pernyataan:

a. $P(23)$

b. $E(2) \wedge P(2)$

c. $(\forall x)\ (B(2,x) \Rightarrow E(x))$

d. $(\exists x)\ (E(x) \wedge B(x,6))$

e. $(\forall x)\ (\sim E(x) \Rightarrow \sim B(2,x))$

f. $(\forall x)\ [P(x) \Rightarrow (\exists y)\ (E(y) \wedge B(x,y))]$

g. $(\forall x)\ [E(x) \Rightarrow (\forall y)\ (B(x,y) \Rightarrow E(y))]$

h. $(\exists x)\ [A(x) \wedge (\forall y)\ (P(y) \Rightarrow \sim B(x,y))]$

2. Nyatakan kalimat berikut dalam bentuk simbol-simbol.

a. Semua burung hidup dalam air.
b. Hanya direktur yang mempunyai sekretaris pribadi.
c. Orang bali tidak semuanya bisa menari.
d. Tidak ada sesuatu pun di dalam rumah itu yang lolos dari kebakaran.
e. Beberapa obat berbahaya, kecuali jika digunakan dalam dosis yang tepat.
f. Setiap manusia akan sehat jika ia makan makanan yang bergizi dan sering berolahraga.