INVERS MATRIKS

Definisi:

Sebuah matriks $n \times n$ dinamakan **matriks elementer** jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks satuan (identitas) $n \times n$ dengan melakukan sebuah operasi baris elementer

Contoh:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

(baris ke 2 I_2 dikalikan -3)

b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(baris ke 2 dan baris ke 4 dari I_4 ditukar)

Definisi:

Invers dari matriks kuadrat A , ditulis A^{-1} adalah suatu matriks yang memenuhi sifat $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Teorema:

Sebuah matriks kuadrat A dapat di balik (invertible) jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$

Metode mencari invers suatu matriks kuadrat A :

a. Operasi baris elementer

Untuk mencari invers suatu matriks A yang dapat dibalik adalah dengan mencari urutan operasi baris elementer tereduksi A pada matriks satuan dan kemudian melakukan urutan operasi yang sama ini pada I_n untuk mendapatkan A^{-1} .

$$\begin{array}{c} [A \mid I] \text{ operasi baris elementer} \quad [I \mid A^{-1}] \\ \hline \longrightarrow \end{array}$$

Contoh:

1. Carilah invers dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Jawab:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} B_2 - 2B_1 \\ B_3 - B_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & : & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{B_3 + \frac{1}{2}B_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & : & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1)B_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} B_2 + 3B_3 \\ B_1 - 3B_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & : & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} B_1 - 2B_2 \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & : & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{jadi } A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Carilah invers dari matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

jawab:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & : & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} B_2 - 2B_1 \\ B_3 + B_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & : & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3 + B_2 \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena terdapat sebuah baris yang semua elemennya nol pada ruas kiri, maka matriks B tidak dapat dibalik.

b. Adjoin matriks

Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

Contoh: carilah invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

Jawab: matriks kofaktor $A = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$ dan $\det(A) = 64$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}, \text{ jadi } A^{-1} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & \frac{16}{64} \\ \frac{-16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}$$

Latihan:

1. yang mana diantara matriks-matriks dibawah ini yang merupakan matriks elementer

a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Tentukan operasi baris yang akan mengembalikan matriks elementer dibawah ini menjadi matriks satuan

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Carilah invers matriks berikut jika matriks berikut dapat dibalik dengan menggunakan operasi baris elementer

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

$$d. \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$$

$$e. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

4. tentukan invers matriks berikut dengan menggunakan matriks adjoin

$$a. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c. \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$