INDUKSI MATEMATIK

Induksi matematik adalah merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam Matematika. Induksi matematik digunakan untuk membuktikan pernyataan yang khusus menyangkut bilangan bulat positif. Pembuktian dengan Induksi matematik dapat diilustrasikan dengan fenomena yang terkenal dengan *Efek Domino*. Sejumlah batu domino diletakan berdiri dengan jarak ruang yang sama satu dengan yang lain. Untuk merebahkan domino kita hanya cukup mendorong domino 1 ke kanan. Jika Domino 1 didorong kekanan, ia akan memdorong domino ke 2, domino 2 mendorong domino 3, dst sampai semua domino rebah ke kanan.

A. PRINSIP INDUKSI SEDERHANA

Misal p(n) adalah pernyataan yang bergantung pada n bilangan bulat positif. Kita ingin membuktikan bahwa p(n) benar utnuk semua bilangan bulat positif. Langkah induksi:

1. *Basis Induksi*: tunjukan p(1) benar
2. *Hipotesa induksi*: Misal p(n) benar untuk semua bilangan positif n ≥ 1.
3. Buktikan bahwa p(n+1) benar.

Contoh:

1. Tunjukan bahwa 1 + 2 + 3 + . . . + n = $\frac{n(n+1)}{2}$ untuk n≥1.

Jawab:

- Basis induksi

  Untuk n = 1, 1 = $\frac{1(1+1)}{2}$

  = 2/2

  = 1 (benar)

- Hipotesa induksi

  Andaikan untuk n≥1

  1 + 2 + 3 + . . . + n = $\frac{n(n+1)}{2}$ benar

- Akan dibuktikan untuk (n+1),

  1 + 2 + 3 + . . . + n + (n+1) = $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

bukti:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$

$= \frac{(n+1)}{2}(n+2)$

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Terbukti.

$\therefore 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ untuk $n \geq 1$.

2. Tunjukan: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, untuk n bilangan pasitif.

Jawab:

- Basis induksi

  Untuk $n = 1$, $1 = 1^2$

  $= 1$(benar)

- Hipotesa induksi

  Andaikan untuk $n \geq 1$,

  $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ benar

- Akan dibuktikan:

  $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2(n+1) - 1)= (n+1)^2$

  Bukti:

  $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2(n+1) - 1) = n^2 + (2(n+1) - 1)$

  $= n^2 + 2n + 1$

  $= (n+1)^2$

  Terbukti.

$\therefore 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, untuk n bilangan pasitif.

2. Untuk $n \geq 1$, tujukan bahwa $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3

Jawab:

- Basis Induksi

  Untuk $n = 1$, $1^3 + 2.1 = 1 + 2 = 3$ adalah kelipatan 3 (benar).

- Hipotesa Induksi

  Andaikan benar bahwa $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3.
- Akan dibuktikan:

  Untuk p(n+1): $(n+1)^3 + 2(n+1)$ adalah kelipatan 3

  Bukti:

  $$(n+1)^3 + 2(n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (2n + 2)$$
  $$= (n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3)$$
  $$= (n^3 + 2n) + 3\ (n^2 + n + 1)$$

  Karena $(n^3 + 2n)$ adalah kelipatan 3 (hipotesa Induksi) dan $3\ (n^2 + n + 1)$ adalah juga merupakan kelipatan 3, maka $(n^3 + 2n) + 3\ (n^2 + n + 1)$ adalah kelipatan 3.

  Terbukti.

$\therefore$ $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3 utnuk $n \geq 1$.

B. PRINSIP INDUKSI YANG DIRAPATKAN (generalized)

Prinsip Induksi sederhana digunakan untuk membuktikan pernyataan p(n) dimana n dimulai dari 1. Prinsip Induksi yang dirapatkan digunakan untuk membuktikan pernyataan p(n) dimana n tidak harus dimulai dari 1, tetapi berlaku untuk semua bilangan bulat positif (nonnegative).

Misal p(n) adalah pernyataan. Kita akan buktikan p(n) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Langkah Induksi:

1. *Basis Induksi*: $p(n_0)$ benar
2. *Hipotesa Induksi* : Andaikan p(n) benar untuk $n \geq n_0$.
3. Akan dibuktikan bahwa p(n+1) benar.

Contoh:

1. Tunjukan bahwa utnuk semua bilangan bulat non negative

   $2^0 + 2^1 + 2^2 + . . . + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Jawab:

- Basis Induksi

  Untuk $n = 0 \Rightarrow 2^0 = 2^{0+1} - 1$
  $$1 = 2 - 1$$
  $$1 = 1 \text{ (benar)}$$
- Hipotesa Induksi

  Andaikan untuk $n \geq 0$, $2^0 + 2^1 + 2^2 + . . . + 2^n = 2^{n+1} - 1$ adalah benar.

- Akan dibuktikan untuk p(n+1) : $2^0 + 2^1 + 2^2 + . . . + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} – 1$

  Bukti:

  $2^0 + 2^1 + 2^2 + . . . + 2^n + 2^{n+1} = (2^{n+1} – 1) + 2^{n+1}$

  $= (2^{n+1} + 2^{n+1}) – 1$

  $= 2.\ 2^{n+1} – 1$

  $= 2^{n+2} – 1$ (terbukti)

$\therefore 2^0 + 2^1 + 2^2 + . . . + 2^n = 2^{n+1} – 1$, utnuk semua bilangan bulat nonnegatif.

2. Tunjukan bahwa $n^2 \geq 2n + 1$, untuk $n \geq 4$

Jawab:

- Basis Induksi

  Untuk $n = 4 \Rightarrow 4^2 \geq 2.4 + 1$

  $16 \geq 9$ (benar)

- Hipotesa Induksi

  Andaikan benar bahwa $n^2 \geq 2n + 1$, untuk $n \geq 4$.

- Akan dibuktikan bahwa $(n+1)^2 \geq 2(n+1) + 1$

  Bukti:

  $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq (2n + 1) + 2n + 1= (2n + 2) + 2n = 2\ (n+1) + 2n$

  Karena untuk $n \geq 4$, $2n \geq 1$, maka : $2(n+1) + 2n \geq 2(n+1) + 1$

  jadi, $(n+1) \geq 2(n+1)$ +1(terbukti)

C. PRINSIP INDUKSI KUAT

Misal p(n) adalah suatu pernyataan yang menyangkut bilangan bulat. Kita akan buktikan bahwa p(n) adalah benar utnuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Langkah induksi:

1. *Basis Induksi*: $p(n_0)$ benar.
2. *Hipotesa Induksi* : Andaikan utnuk semua bilangn bulat $n \geq n_0$, $p(n_0)$, $p(n_0 + 1)$, . . . , p(n) benar.
3. Akan dibuktikan p(n+1) benar.

Contoh:

Tunjukan bahwa bilangan bulat positif adalah bilangan prima jika hanya jika hanya habis dibagi 1 dan dirinya sendiri.

Jawab:

Kita akan buktikan bahwa utnuk setiap bilangan bulat n≥2, dapat dinyatakan sebagai hasil kali satu atau lebih bilangan prima.

- Basis Induksi

  Untuk n = 2 ⇒ 2 = 1.2 (2 dapat dinyatakan sebagai perkalian satu bilangan prima) benar.

- Hipotesa induksi

  Misalkan 2,3,4, . . ., n dapat dinyatakan sebagai hasil kali satu atau lebih bilangan prima.

- Akan dibuktikan bahwa (n+1) dapat dinyatakan sebagai hasil kali satu atau lebih bilangan prima.

  Bukti:

  Jika (n+1) adalah bilangan prima , maka (n+1) dapat dinyatakan sebagai hasil kali satu bilangan prima yaitu (n+1) = 1.(n+1)

  Jika (n+1) bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan positif a sedemikian sehingga 2< a < (n+1) yang membagi habis (n+1). Dengan kata lain:

  $\frac{(n+1)}{a}$ = b atau (n+1) = ab

  Dari hipotesa, karena 2< a,b<n maka a dan b dapat dinyatakan sebagai hasil kali satu atau lebih bilangan prima. Jadi, ab juga dapat dinyatakan sebagai hasil kali satu atau lebih bilangan prima, sehingga (n+1) dapat dinyatakan sebagai hasil kali satu atau lebih bilangan prima. (terbukti)

SOAL LATIHAN

1. Buktikan dengan Induksi Matematik:

   a. 1.2 + 2.3 + 3.4 + . . . + n(n+1) = $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, n≥1

   b. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots, + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, n≥1

   c. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$, n≥1

   d. $\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \frac{3^2}{5.7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$, n≥1

e. $n^4 - 4n^2$ habis dibagi 3 untuk $n \geq 2$.
f. $11^n - 6$ habis dibagi 5 untuk $n \geq 1$.
g. $2^n > n^2$ untuk $n > 4$.

2. Tunjukan bahwa banyaknya himpunan bagian dari suatu himpunan yang mempunyai anggota sejumlah n adalah 2^n. (gunakan induksi kuat).

3. Suatu string biner panjangnya n bit. Jumlah string biner yang mempunyai bit 1 sejumlah ganjil adalah 2^{n-1}. buktikan pernyataan tersebut untuk $n \geq 1$.

4. Tunjukan bahwa $n! \geq 2^n$ untuk $n \geq 4$.