DETERMINAN

Determinan dari suatu matriks A = (a_{ij}) berukuran n x n adalah suatu skalar yang menentukan matriks A. Determinan dinyatakan dengan det (A) atau $|A|$ atau

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definisi:

Misal A adalah matriks kuadrat berorde-n. determinan A didefinisikan sebagai:

$$\text{Det}(A) = \sum \text{sgn}(\sigma)\, a_{1j1}\, a_{2j2} \dots a_{njn}$$

Dimana penjumlahan diambil dari semua permutasi σ = { j1, j2 , . . . , jn} dari {1,2,…, n}

Berdasar definisi diatas, didapat:

a. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

b. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23}$

a_{32}

atau

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

catatan: aturan ini tidak berlaku untuk determinan matriks berorde-4 atau yang lebih tinggi.

Contoh: Hitunglah determinan dari

A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Jawab:

det(A) = (3)(-2) – (1)(4) = -10

det(B) = (1)(5)(9) + (2)(6)(7) + (3)(-4)(8) – (3)(5)(7) – (1)(6)(8) – (2)(-4)(9)

= 45 + 84 + 96 – 105 – (-48) – (-72)

= 240

Sifat – sifat fungsi determinan

a. Jika sebarang matriks kuadrat A mengandung satu baris/kolom yang semua elemennya nol, maka det(A) = 0.

   Contoh: A = $\begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka det (A) = 0 (elemen-elemen baris 2 semua nol)

b. Jika terdapat elemen- elemen 2 baris / kolom dari matriks kuadrat A yang sebanding / identik, maka det(A) = 0.

   Contoh: A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, maka det (A) = 0 (baris 1 dan baris 2 sebanding)

c. Jika matriks B didapat dari matriks A dengan jalan menukar letak sembarang baris/kolom dari matriks A, maka det (B) = -det(A).

   Contoh: A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   Det (A) = -2 dan det (B) = 2 (matriks B didapat dari matriks A dengan menukar letak kolom 1 dengan kolom 2).

d. Jika Matriks B didapat dari matriks A dengan jalan menambah unsur – unsur pada baris / kolom ke-p dengan k kali unsur-unsur baris/kolom ke-q, maka det (B) = det (A)

Contoh: A = $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

Det (A) = -8 dan det B = -8 (baris 3 matriks B didapat dengan jalan baris 3 matriks A ditambah 2 kali baris 2 matriks A).

e. Jika matriks B didapat dari matriks A dengan jalan mengalikan k kali baris ke-p dari matriks A, maka det (B) = k . det(A)

Contoh: A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, det (A) = 165

B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -6 & 12 & 18 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ (-2).3 & (-2).(-6) & (-2).9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ = (-2).165 = -330

f. Jika A adalah sebarang matriks kuadrat, maka det(A) = det(A^t).

Menghitung Determinan Dengan Reduksi Baris.

Metode ini digunakan untuk menghindari perhitungan yang panjang dalam penerapan definisi determinan secara langsung. Determinan suatu matriks dapat dihitung dengan mereduksi matriks tersebut dalam bentuk eselon baris.

Sifat – sifat matriks eselon baris tereduksi (reduced row-echelon form)

1. Jika baris terdiri tidak seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama dalam baris tersebut adalah 1. (kita namakan 1 utama)
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya nol, maka semua baris seperti ini dikelompokan bersama – sama dibawah matriks.
3. Dalam sembarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tinggi.
4. Masing – masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol ditempat lain.

Sebuah matriks yang mempunyai sifat 1,2,3 dikatakan berada dalam bentuk eselon baris (row-echelon form)

Contoh: A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Bentuk eselon baris tereduksi bentuk eselon baris

Teorema

Jika A adalah matriks segitiga n x n, maka det(A) adalah hasilkali entri-entri pada diagonal utama, yaitu det(A) = $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \ldots a_{nn}$

Contoh: A = $\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, maka det(A) = 2. (-3). 6 . 9 . 4 = -1296

Contoh menghitung determinan suatu matriks dengan reduksi baris dan dengan menerapkan sifat – sifat determinan:

Hitunglah det (A) dimana A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab: det (A) = $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ = - $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ (baris pertama dan baris 2 dipertukarkan)

= -3 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ (faktor bersama dari baris pertama sebesar 3, berdasar sifat determinan no. e)

= -3 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$ (baris 3 + (-2). Baris 1, notasi B_3 + (-2).B_3)

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \qquad B_3 - 10 \,.\, B_2$$

$$= -3.\ (-55) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3).(-55).1 \ = 165$$