

Pembahasan Ujian Aljabar Linear

1. Kita akan menunjukkan bahwa rumus ini mendefinisikan sebuah hasil kali dalam pada $C[a, b]$ dengan cara membuktikan berlakunya keempat aksioma hasil kali dalam untuk fungsi-fungsi $f = f(x)$, $g = g(x)$, dan $s = s(x)$ di dalam $C[a, b]$:

$$a) \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g, f \rangle$$

yang membuktikan bahwa Aksioma 1 berlaku.

$$\langle f + g, s \rangle = \int_a^b (f(x) + g(x))s(x)dx$$

$$b) \quad = \int_a^b f(x)s(x)dx + \int_a^b g(x)s(x)dx \\ = \langle f, s \rangle + \langle g, s \rangle$$

yang membuktikan bahwa Aksioma 2 berlaku.

$$c) \langle kf, g \rangle = \int_a^b kf(x)g(x)dx = k \int_a^b f(x)g(x)dx = k \langle f, g \rangle$$

yang membuktikan bahwa Aksioma 3 berlaku.

d) Jika $f = f(x)$ adalah fungsi sebarang di dalam $C[a, b]$, maka $f^2(x) \geq 0$ untuk semua nilai x pada a, b ; sehingga,

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) dx \geq 0$$

Lebih jauh lagi, karena $f^2(x) \geq 0$ dan $f = f(x)$ adalah kontinu pada a, b , maka $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ jika dan hanya jika $f(x) = 0$ untuk semua nilai x pada a, b .

Dengan demikian, kita memperoleh $\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2(x) dx = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$. Hal ini membuktikan bahwa Aksioma 4 berlaku.

2. Penyelesaian (a). Pertama-tama kita harus menentukan matriks-matriks koordinat untuk vektor-vektor basis yang baru u'_1 dan u'_2 relatif terhadap basis lama B . Dengan melalui inspeksi.

$$u'_1 = u_1 + u_2$$

$$u'_2 = 2u_1 + u_2$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ u_2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Maka, matriks transisi dari B' ke B adalah

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian (b). Dengan menggunakan (7) dan Matriks transisi dari bagian (a).

$$v_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Untuk memeriksa kebenaran kedua jawaban diatas, kita seharusnya dapat menemukan vektor v baik dengan menggunakan v_B maupun $v_{B'}$.