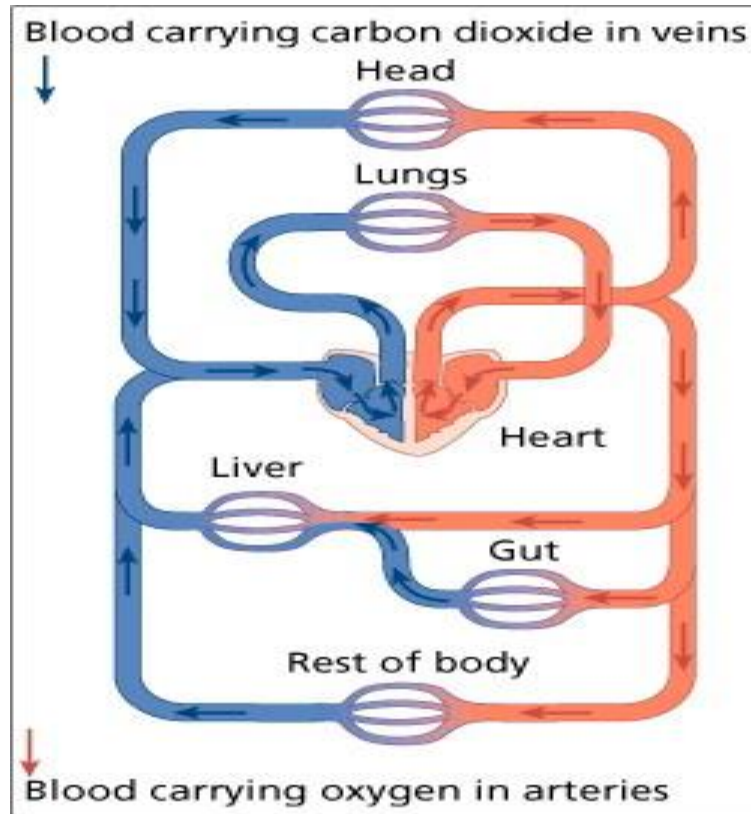


PEMODELAN DIFUSI OKSIGEN DI JARINGAN TUBUH DENGAN KONSUMSI OKSIGEN LINIER TERHADAP KONSENTRASI

**Kartika Yulianti, S.Pd., M.Si.
Jurusan Pendidikan Matematika
FPMIPA - UPI**



Pendahuluan



Sistem Peredaran Darah

- Oksigen memegang peranan bagi kelangsungan metabolisme jaringan (tissue) dalam tubuh.
- Jika sel-sel di suatu jaringan tidak mendapat pasokan oksigen, maka sel-sel tersebut akan mati dan dapat menimbulkan kerusakan jaringan.
- *Circulatory shock*: kehilangan darah dalam jumlah besar, serangan jantung, serta penurunan tekanan darah dengan tajam.



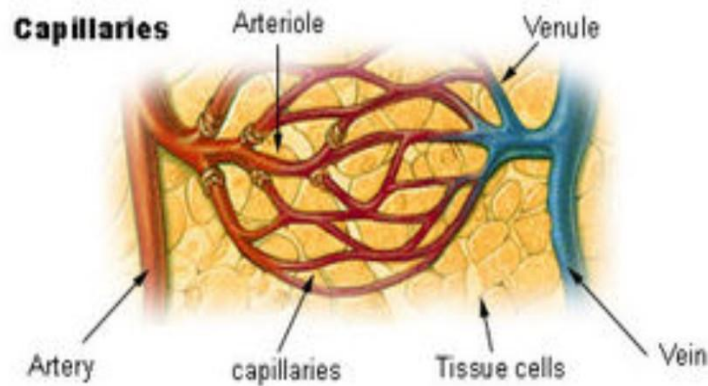
Tujuan:

Membangun suatu model matematika yang menggambarkan proses penyebaran konsentrasi oksigen di suatu jaringan tubuh dengan laju konsumsi oksigen di jaringan yang berupa fungsi linier terhadap konsentrasi .



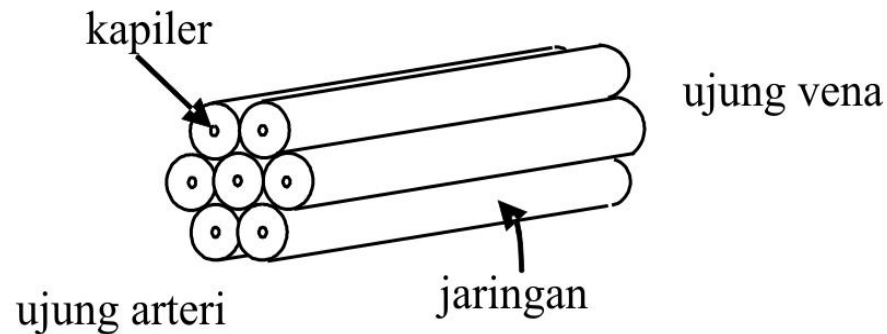
Pemodelan

- Pembuluh kapiler: tersusun dari sebuah lapisan sel (endothelium).
- Molekul-molekul seperti oksigen, karbon dioksida, dan air dapat melalui dinding ini dan memasuki jaringan dengan cara difusi.



Pembuluh darah

Model Krogh-Cylinder



- Representasi dari daerah kapiler-jaringan: konsep pengulangan struktur satuan.
- Setiap kapiler bertanggungjawab untuk menyediakan nutrisi bagi jaringan yang melingkupi kapiler tersebut.

Asumsi:

- Bukan daerah percabangan.
- Reaksi kimia yang terjadi di jaringan berdistribusi secara kontinu.
- Simetri terhadap sumbu.
- Laju perpindahan material pada dinding luar jaringan adalah nol.



Model Matematika

Persamaan difusi:

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{t}} = D_j \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial^2 \tilde{r}} \right) - g(\tilde{c})$$

$\tilde{c}$: konsentrasi oksigen di daerah jaringan.

$\tilde{t}$: waktu.

$\tilde{r}$: jari-jari.

D_j : koefisien difusi.

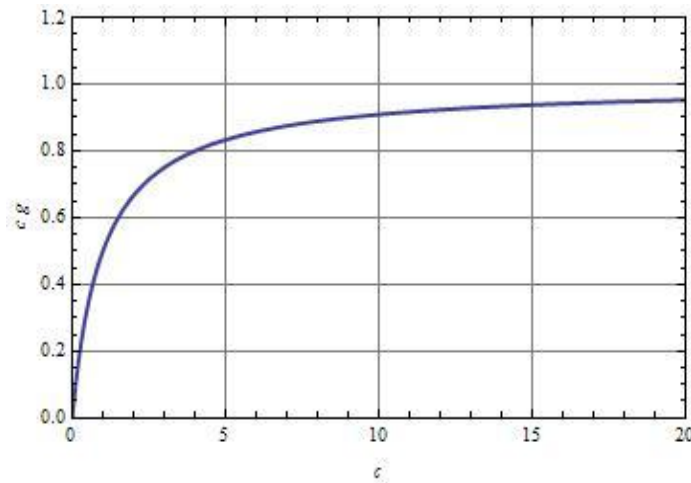
$g(\tilde{c})$: Laju konsumsi oksigen.

Laju konsumsi oksigen mengikuti hukum kinetika Michaelis-menten:

$$g(\tilde{c}) = \frac{A\tilde{c}}{B + \tilde{c}}$$

A dan B adalah konstanta.



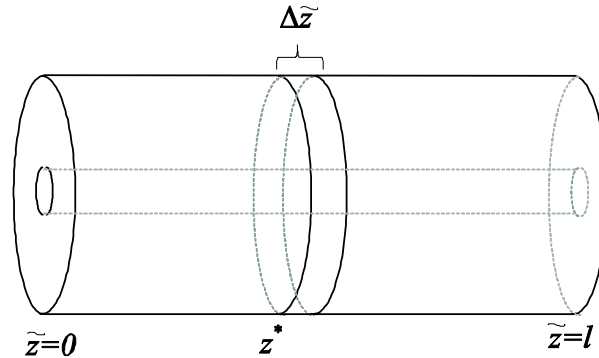


Grafik Persamaan Michaelis-Menten dengan A=1 dan B=1



$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{t}} = D_j \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial^2 \tilde{r}} \right) - k \tilde{c}$$

Keadaan Tunak (*Steady State*)



Silinder Kapiler-Jaringan

- Misalkan $\tilde{c}_k(z)$: Konsentrasi oksigen di kapiler pada posisi z

$$\tilde{c}_k(0) = c_{in}$$

- Kondisi kesetimbangan di kapiler:

$$-\langle u \rangle \pi a^2 \frac{d\tilde{c}_k(\tilde{z})}{d\tilde{z}} = 2\pi a h (\tilde{c}_k - \tilde{c})$$

$\langle u \rangle$: kecepatan aliran darah

h : ketahanan perpindahan massa

a : jari-jari kapiler

b : jari-jari jaringan

Jaringan:

$$D_j \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2 \tilde{c}}{\partial^2 \tilde{r}} \right) = k \tilde{c}$$

Syarat batas:

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{r}}(b) = 0$$

$$-D_j \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \tilde{r}} = h(\tilde{c}_k(\tilde{z}) - \tilde{c}) \quad \text{pada} \quad \tilde{r} = a$$

Penskalaan:

$$\tilde{c} = c.c_{in},$$

$$\tilde{r} = a.r$$

$$\tilde{z} = az.$$



Persamaan difusi untuk daerah jaringan:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} = K^2 c, \quad (1)$$

dimana $K = \left(\frac{ka^2}{D_j} \right)^{1/2}$

Persamaan konsentrasi untuk daerah kapiler:

$$-\langle u \rangle \pi a \frac{dc_k(z)}{dz} = 2\pi ah(c_k - c), \quad \text{pada } r = 1 \quad (2)$$

Syarat batas:

$$\frac{\partial c}{\partial r} \left(\frac{b}{a} \right) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial r}(1) = -\frac{ha}{D_j}(c_k - c), \quad (4)$$

$$c_k(0) = 1. \quad (5)$$



Solusi daerah kapiler:

$$c_k(z) = \exp \left[\frac{-2\beta\nu}{\varpi + \beta\nu} \left(\frac{h}{\langle u \rangle} \right) z \right],$$

Solusi daerah jaringan:

$$c(r, z) = \frac{c_k(z)}{\varpi + \beta\nu} \left(I_0(Kr) K_1 \left(K \frac{b}{a} \right) + K_0(Kr) I_1 \left(K \frac{b}{a} \right) \right),$$

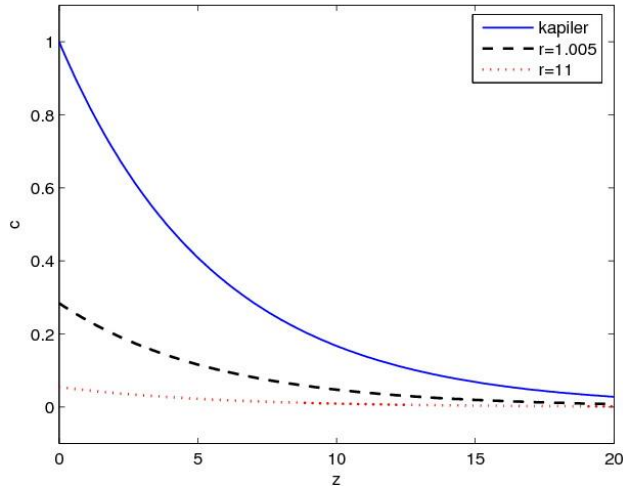
dimana $\beta = \frac{\langle D_j \rangle^{1/2}}{h}$, I dan K adalah fungsi Bessel termodifikasi, serta

$$\varpi = I_0(K) K_1 \left(K \frac{b}{a} \right) + K_0(K) I_1 \left(K \frac{b}{a} \right),$$

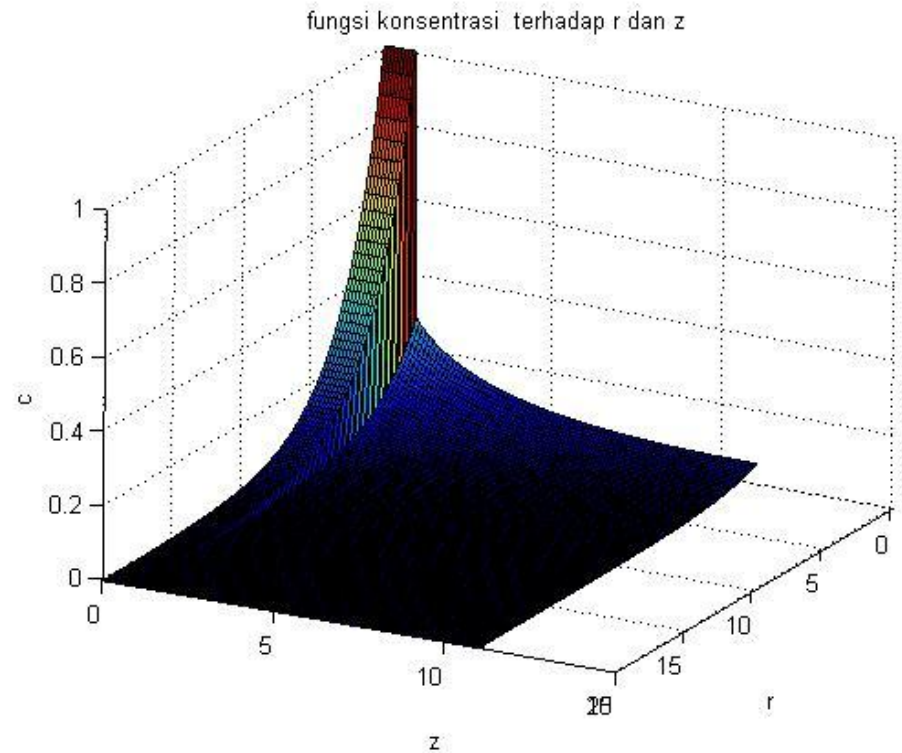
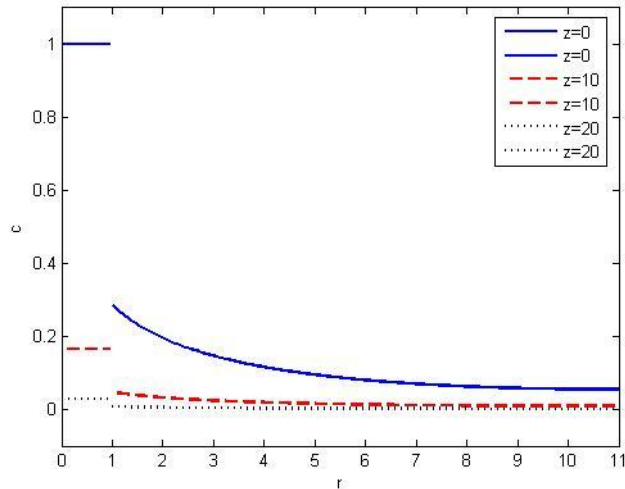
$$\nu = K_1(K) I_1 \left(K \frac{b}{a} \right) - I_1(K) K_1 \left(K \frac{b}{a} \right).$$

Grafik konsentrasi oksigen di kapiler dan jaringan.

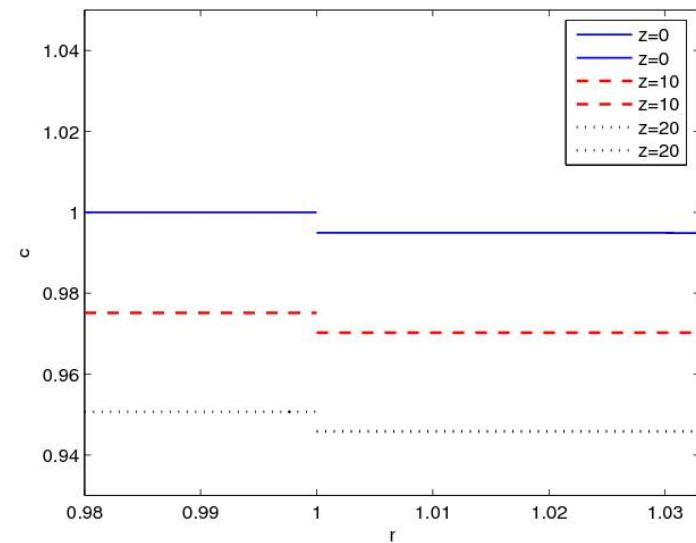
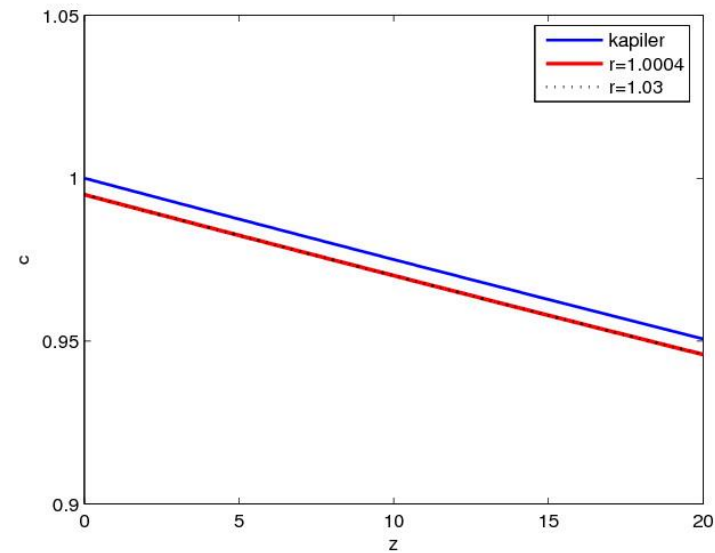
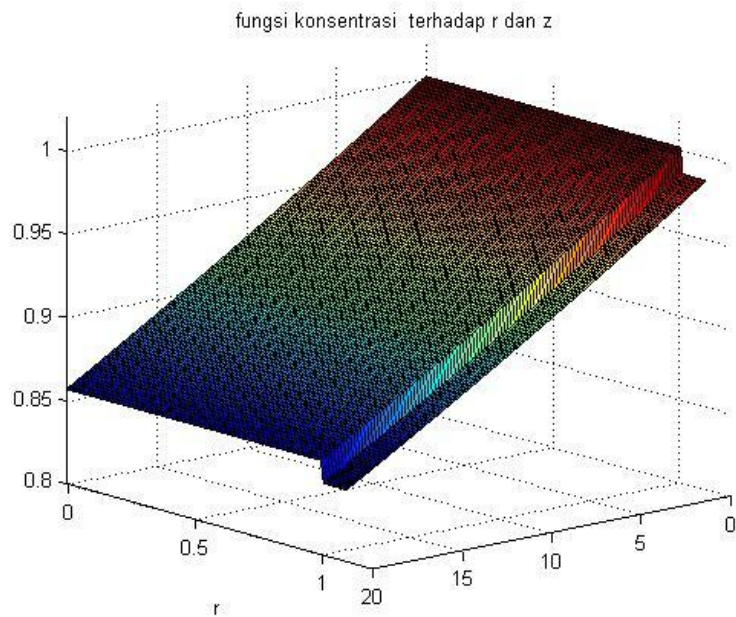
Arah aksial:



Arah radial:

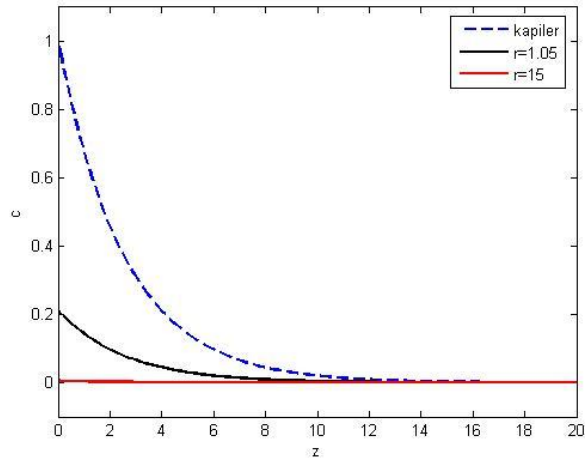


Jaringan yang tipis

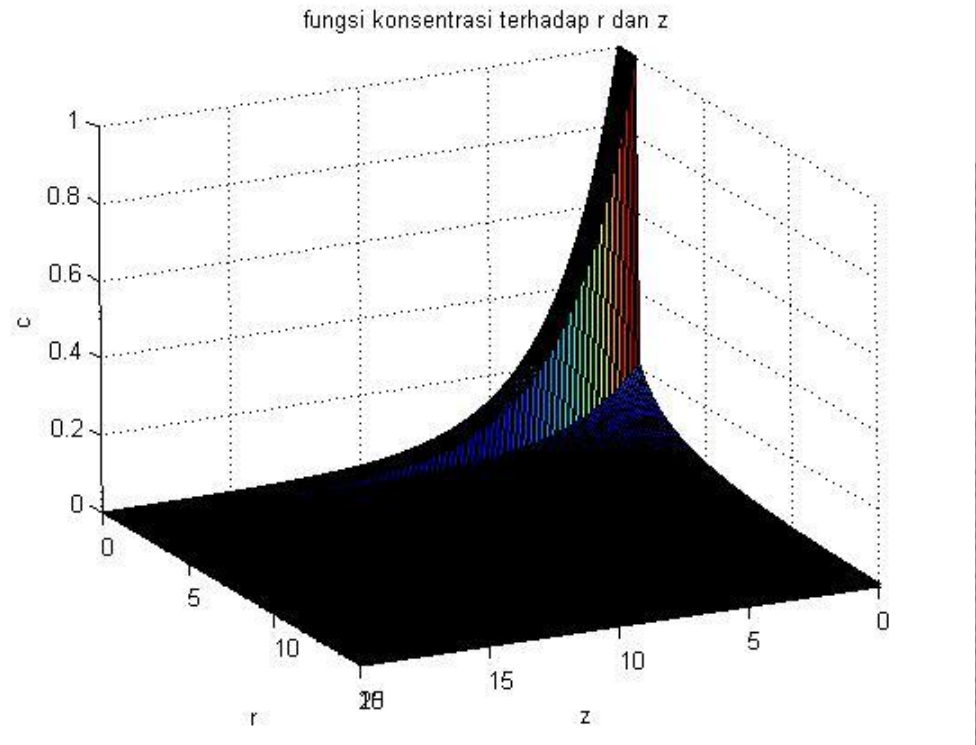
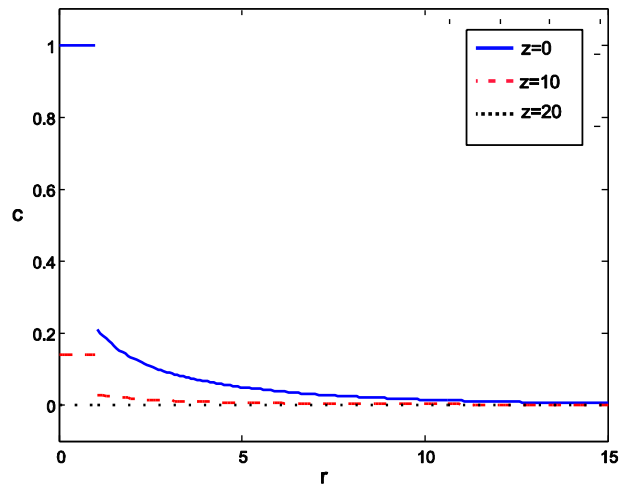


Jaringan yang tebal ($b \rightarrow \infty$)

Arah aksial

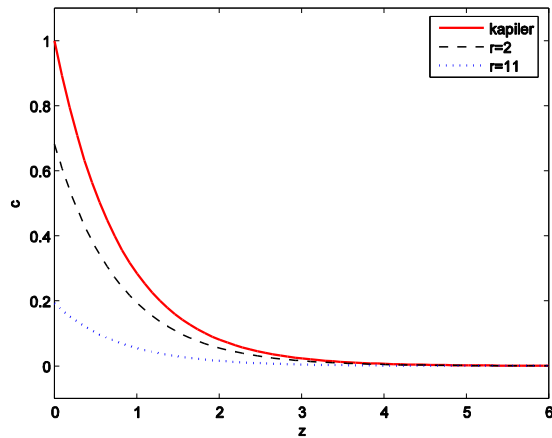


Arah radial

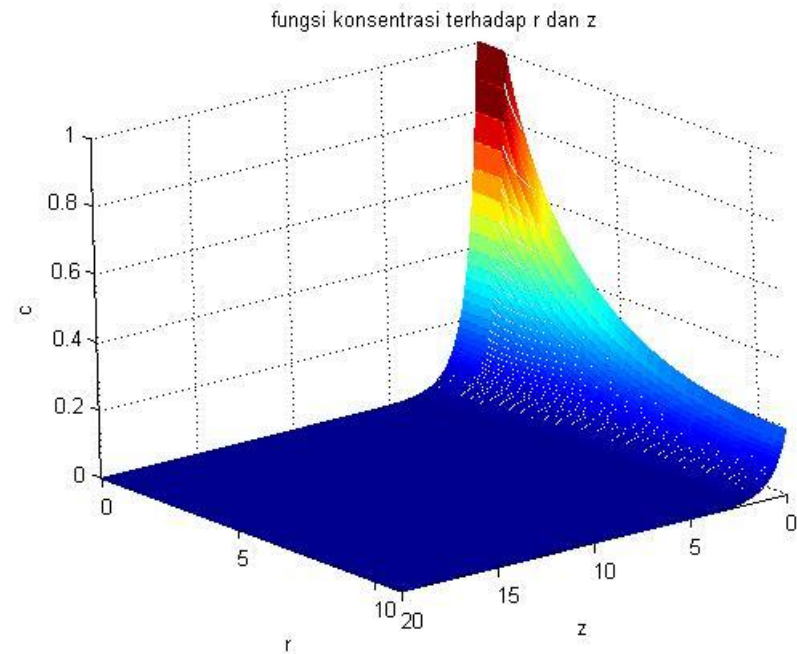
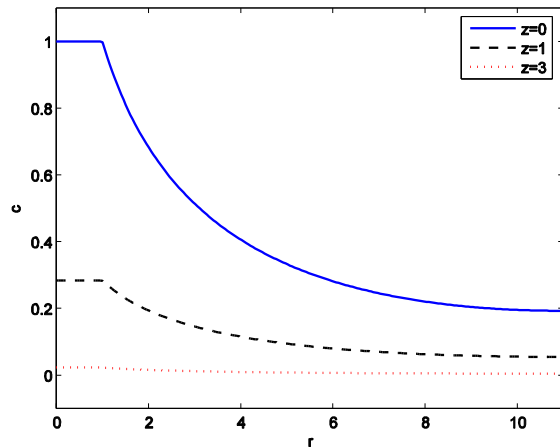


Koefisien Perpindahan Massa Tinggi

Arah aksial



Arah radial



Koefisien Perpindahan Massa Menuju nol.

■ Fungsi konsentrasi di jaringan:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} c(r, z) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{c_k}{\varpi + \beta \nu} \left[I_0(Kr) K_1 \left(K \frac{b}{a} \right) + K_0(Kr) I_1 \left(K \frac{b}{a} \right) \right] \\ = 0$$

■ Daerah kapiler:

$$\lim_{h \rightarrow 0} c_k(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \exp \left[\frac{-2\beta \nu}{\varpi + \beta \nu} \left(\frac{h}{\langle u \rangle} \right) z \right] \\ = 1$$

$$c_k(z) = c_k(0)$$

Kesimpulan

- Baik dalam arah radial maupun aksial, nilai konsentrasi oksigen menurun.
- Distribusi oksigen di jaringan tubuh dipengaruhi jari-jari dinding jaringan dan ketahanan perpindahan massa dinding kapiler.



Daftar Pustaka

- Carslaw, H.S. dan Jaeger, J.C. 1959. *Conduction Of Heat In Solids*. New York. Oxford Clarendon Press.
- Mathews, John H. dan Fink, Kurtis D. 1999. *Numerical Methods Using Matlab*. London. Prentice-Hall International.
- Middleman, Stanley. 1972. *Transport Phenomena in the Cardiovascular System*. New York. John-Wiley \& Sons, Inc.
- Poulikakos. 1994. *Conduction Heat Transfer*. New Jersey. Prentice-Hall.
- Ross, J. 1996. *Role of Blood Vessel*. Tersedia di http://classes.tncc.edu/eburke/other-notes/Blood_Vessel.htm.
- <http://www.wikipedia.com>.

TERIMA KASIH

