HAND OUT
MATA KULIAH TEORI GRAF (MT 424)
JILID DUA

Oleh:

Kartika Yulianti, S.Pd., M.Si.

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2008

Minggu ke 5 : Kesebidangan

Kesebidangan.

Sisi yang saling berpotongan dalam diagram graf membentuk titik potong (titik interseksi atau *crossover*). Jika *G* adalah graf yang digambar pada sebuah permukaan S demikian sehingga tidak ada dua sisi yang berpotongan, maka kita katakan bahwa *G* dibentangkan pada S. Sebuah graf yang dapat dibentangkan pada sebuah bidang tanpa titik interseksi disebut **graf planar**. Sebuah graf yang tidak planar disebut **graf nonplanar**.

Jika sebuah graf planar yang telah dibentangkan pada sebuah bidang semikian sehingga tidak ada interseksi yang terjadi, disebut **graf datar**.

Graf *G* disebut **graf planar maksimal** jika penambahan sebuah sisi baru pada *G* mengakibatkan *G* menjadi graf non planar.

Teorema Kuratowski

Sebuah graf adalah planar jika dan hanya jika graf tersebut tidak mengandung subdivisi dari K_5 dan $K_{3,3}$ sebagai graf bagian.

Teorema Euler

Jika *G* merupakan sebuah graf terhubung dengan n simpul, dan m sisi, serta f muka, maka

$$n - m + f = 2.$$

Teorema

Misalkan g adalah graf planar maksimal dengan n simpul dan m sisi, dan $n \geq 3$. Maka berlaku

$$m = 3n - 6$$

Akibat

Jika G adalah graf planar dengan n simpul dan m sisi, dan $n \geq 3$, maka berlaku $m \leq 3n - 6$.

Akibat

Setiap graf planar memuat sebuah simpul dengan derajat paling banyak 5.

Minggu ke 6 : Keterhubungan

Keterhubungan

Keterhubungan sisi pada graf *G*, yang dilambangkan dengan $\lambda(G)$, adalah banyak sisi paling sedikit yang dapat dihapus, demikian sehingga graf *G* menjadi graf tak terhubung, jika $\lambda(G) \geq k$, maka *G* disebut **graf terhubung dalam k-sisi**.

Sebuah himpunan pemotong (cutset) pada sebuah graf terhubung *G* adalah sebuah himpunan S yang memuat sisi-sisi dengan sifat-sifat berikut:

a. Penghapusan semua sisi pada S membuat *G* menjadi tidak terhubung.
b. Penghapusan beberapa sisi pada S (tapi tidak semuanya) tidak mengakibatkan *G* tak terhubung.

Keterhubungan simpul $\kappa(G)$ dari graf terhubung *G* adalah jumlah simpul paling sedikit yang penghapusannya mengakibatkan *G* tak terhubung. Jika $\kappa(G) \geq k$, maka *G* disebut **graf terhubung dalam k-simpul**.

Keterhubungan $\kappa(K_n)$ dari sebuah graf lengkap K_n adalah n-1. Jika $n-1 \geq k$, maka graf K_n disebut terhubung dengan k-simpul.

Sebuah **simpul pemotong** adalah sebuah simpul tunggal yang penghapusannya mengakibatkan sebuah graf tak terhubung.

Sebuah himpunan simpul pemotong pada sebuah graf terhubung *G* adalah sebuah himpunan S yang memuat simpul-simpul dengan sifat-sifat berikut:

a. Penghapusan semua simpul pada S membuat *G* menjadi tidak terhubung.
b. Penghapusan beberapa simpul pada S (tapi tidak semuanya) tidak mengakibatkan *G* tak terhubung.

<u>Teorema</u>

Untuk setiap graf terhubung *G* berlaku $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, dengan $\delta(G)$ merupakan derajat simpul terkecil dalam graf *G*.

Minggu ke 7 : Pewarnaan

Pewarnaan Graf

Masalah pewarnaan simpul pada graf *G* adalah penentuan warna bagi setiap simpul pada graf *G* sedemikian rupa sehingga tiap dua simpul yang saling ajasen mendapat warna yang berbeda.

Pewarnaan k-simpul graf *G* adalah pemasangan k warna 1, 2, ..., k pada simpul-simpul dari *G*. Pewarnaan ini termasuk **pewarnaan sejati** jika tak ada dua simpul yang saling ajasen mempunyai warna yang sama.

Graf *G* disebut **graf yang terwarnai dalam k simpul**, jika *G* mempunyai pewarnaan sejati dalam k simpul.

Bilangan kromatik $\chi(G)$ = k dari sebuah graf *G* adalah nilai minimum k demikian sehingga *G* merupakan graf yang terwarnai dalam k warna. Jika $\chi(G)$ = k, maka dikatakan bahwa *G* adalah k-kromatik.

Sebuah graf *G* disebut **graf kritis**, jika untuk setiap graf bagian sejati H dari graf *G* berlaku $\chi(H) < \chi(G)$.

Bilangan kromatik sisi $\chi'(G)$ dari sebuah graf *G* yang tanpa loop, adalah nilai k minimum sehingga *G* sisi-sisinya dapat diwarnai dengan k warna.

Graf *G* disebut **kromatik dalam k-sisi**, jika $\chi'(G)$ = k.

Teorema Konig

Jika *G* merupakan graf bipartit, maka $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Teorema Vizing

Jika *G* merupakan graf sederhana, maka berlaku $\chi'(G) = \Delta(G)$ atau $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Teorema Vizing- Versi Perluasan

Jika G merupakan graf tanpa loop, dan h merupakan jumlah sisi yang menghubungkan dua simpul berlainan, maka berlaku $\chi'(G) = \Delta(G) + h$.

Teorema Shanon

Jika G adalah graf sederhana, maka berlaku $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq 3\Delta(G)/2$.

Teorema

Untuk setiap graf lengkap K_n, berlaku

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1, & \text{jika } n \text{ genap.} \\ n, & \text{jika } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Minggu ke 9 - 12 : - Matching dan Covering

- Aplikasi Matching

Matching.

Diketahui $G = (V, E)$. M Subhimpunan dari E disebut matching jika anggota-anggota dari M berupa link dan tidak saling ajasen di G.

Jika $(u, v) \in M$, maka titik u dan v dikatakan *matched under M*.

Sebuah matching M saturates sebuah titik v, dan v dikatakan *M-saturated*, jika beberapa sisi di M insiden dengan v, jika tidak, v dikatakan *M-unsaturated*.

Jika setiap titik di G *M-saturated*, maka matching M merupakan matching sempurna (*perfect matching*).

M disebut matching maksimum di G jika tidak ada matching M' sedemikian hingga $|M'|>|M|$. Oleh karena itu, setiap matching sempurna adalah maksimum.

Misalkan M merupakan matching di G. Sebuah lintasan *M-alternating* di G adalah lintasan yang sisi-sisinya bergantian di $E \backslash M$ dan M.

Sebuah lintasan *M-augmenting* adalah lintasan *M-alternating* yang titik awal dan titik akhirnya *M-unsaturated*.

Teorema

Sebuah matching M di G merupakan matching maksimum jika dan hanya jika G tidak memuat lintasan *M-augmenting*.

Diketahui $S \subseteq V(G)$. Himpunan tetangga dari S di G didefinisikan merupakan himpunan semua titik yang ajasen ke titik-titik di S, dinotasikan $N_G(S)$.

<u>Teorema</u>

Misalkan G graf bipartite dengan bipartisi (X, Y). Maka G memuat sebuah matching yang saturates ke semua titik di X jika dan hanya jika

$$|N(S)| \geq |S| \text{ untuk semua } S \subseteq X.$$

<u>Akibat</u> (*marriage theorem*)

Jika G graf bipartit teratur dalam derajat k dengan $k>0$, maka G mempunyai matching sempurna.

Covering dari sebah graf G didefinisikan $K \subseteq V(G)$ sedemikian sehingga setiap sisi di G paling tidak mempunyai satu ujung di K.

Sebuah covering K disebut covering minimum jika tidak ada covering K' di G sehingga $|K'|<|K|$.

Jika K adalah covering di G dan M adalah matching di G, maka K memuat paling tidak satu ujung dari setiap sisi di M. Sehingga untuk setiap matching M dan covering K, berlaku $|M|\leq|K|$. Lebih jauh lagi, jika M^* merupakan matching maksimum dan $\tilde{K}$ merupakan covering minimum, maka

$$|M^*| \leq |\tilde{K}|.$$

<u>Lemma</u>

Misalkan M merupakan matching dan K adalah covering sedemikian sehingga $|M|=|K|$, maka M adalah matching maksimum dan K adalah covering minimum.

<u>Teorema</u>

Dalam graf bipartit, banyaknya sisi dalam sebuah matching maksimum sama dengan banyaknya titik dalam covering minimum.

Sebuah komponen dalam sebuah graf dkatakan ganjil atau genap bergantung pada banyaknya titik dalam komponen tersebut, dinotasikan dengan $o(G)$.

Teorema

Graf G mempunyai matching sempurna jika dan hanya jika

$$o(G\text{-}S) \leq |S| \text{ untuk semua } S \subset V.$$

Teorema

Graf teratur dalam derajat 3 tanpa sisi pemotong mempunyai sebuah matching sempurna.

Aplikasi matching dalam kehidupan sehari-hari.

Masalah penempatan pekerjaan. Dalam suatu perusahaan, n orang karyawan X_1, X_2, X_3, ..., X_n tersedia untuk n buah pekerjaan Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_n, setiap karyawan dapat melakukan satu atau lebih pekerjaan-pekerjaan tersebut. Dapatkah setiap karyawan memperoleh sebuah pekerjaan yang sesuai dengan kualifikasinya?

Minggu ke 13 - 14 : Graf Berarah

Graf Berarah (*Directed Graph*)

Graf berarah *D* adalah triple terurut ($V(D)$, $A(D)$, ϕ_D) yang terdiri dari himpunan tak kosong titik-titik $V(D)$, himpunan busur $A(D)$, dan fungsi insiden ϕ_D yang menghubungkan setiap busur di D ke pasangan terurut titik-titik di D.

Jika a merupakan sebuah busur dan u dan v adalah titik-titik sedemikian sehingga $\phi_D(a)=(u, v)$, maka a dikatakan menghubungkan u ke v; u adalah **ekor** dari a, dan v adalah **kepala** dari a.

Sebuah graf berarah *D*' adalah **sub graf berarah** dari D jika $V(D') \subseteq V(D)$, $A(D') \subseteq A(D)$, dan $\phi_{D'}$ adalah pembatasan fungsi ϕ_D untuk $A(D')$.

Diberikan graf berarah *D*, graf yang diperoleh dengan mengganti setiap busur di graf berarah dengan sisi disebut *underlying graph* dari *D*.

Sebaliknya, graf berarah *D* yang diperoleh dengan memberikan arah kepada graf tidak berarah *G*, dinamakan orientasi dari *G*.

Jalan berarah di D adalah barisan tak-nol berhingga W=(v_0, a_1, v_1, ..., a_k, v_k), yang suku-sukunya bergantian antara busur dan titik sedemikian sehingga, untuk $i = 1, 2, \ldots, k$, busur a_i mempunyai kepala v_i dan ekor v_{i-1}.

Lintasan berarah adalah jalan berarah yang juga merupakan lintasan.

Jika terdapat lintasan (*u*, *v*) di *D*, titik *v* dikatakan terjangkau (*reachable*) dari titik *u* di *D*.

Dua buah titik adalah *diconnected* di *D* jika titik yang satu saling terjangkau dari titik yang lain.

Sebuah graf berarah *D* disebut *diconnected* jika setiap pasang titiknya *diconnected*.

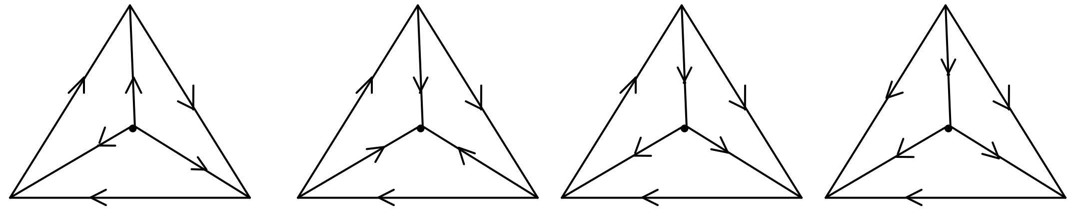
Derajat masuk (*Indegree*) dari titik *v* di *D* adalah banyaknya busur di *D* dengan *v* sebagai kepala, dinotasikan $d_D^-(v)$. Derajat keluar (*Outdegree*) dari titik *v* di *D* adalah banyaknya busur di *D* dengan *v* sebagai ekor, dinotasikan $d_D^+(v)$.

Minimum dan maksimum *indegree* beserta *outdegree* berturut-turut dinotasikan dengan $\delta^-(D), \Delta^-(D), \delta^+(D), \Delta^+(D)$.

<u>Teorema</u>

Graf berarah *D* memuat lintasan berarah dengan panjang $\chi - 1$.

Sebuah orientasi dari graf lengkap dinamakan *tournament*. Berikut adalah contoh *tournament-tournament* dengan empat titik.



Sebuah lintasan Hamilton berarah dari *D* adalah lintasan berarah yang memuat setiap titik di *D*.

Akibat

Setiap *tournament* mempunyai sebuah lintasan Hamilton berarah.

Teorema

Graf berarah *D* mempunyai sebuah himpunan *S* sedemikian sehingga setiap titik di *D* yang tidak di *S* terjangkau dari sebuah titik di *S* dengan sebuah lintasan berarah yang panjangnya maksimal dua.

Akibat

Sebuah *tournament* memuat sebuah titik yang dari setiap titik lainnya terjangkau dengan sebuah lintasan yang panjangnya maksimal dua.

REFERENSI

1. Bondy, J.A. & Murty, U.S.R. 1977. *Graph Theory With Applications*. London: The Macmillan Press LTD.

2. Buckley, F. & Lewinter, M. 2003. *A Friendly Introduction to Graph Theory*. New-Jersey: Carson Education, Inc.

3. Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.

4. Rosen, Kenneth H. 2003. *Discrete Mathematics and Its Application*. New York: The McGraw-Hill Companies.

5. Kusumah, Y.S., M.Sc., Ph.D.. 1997. *Matematika Diskrit*. Bandung: IKIP Bandung Press.