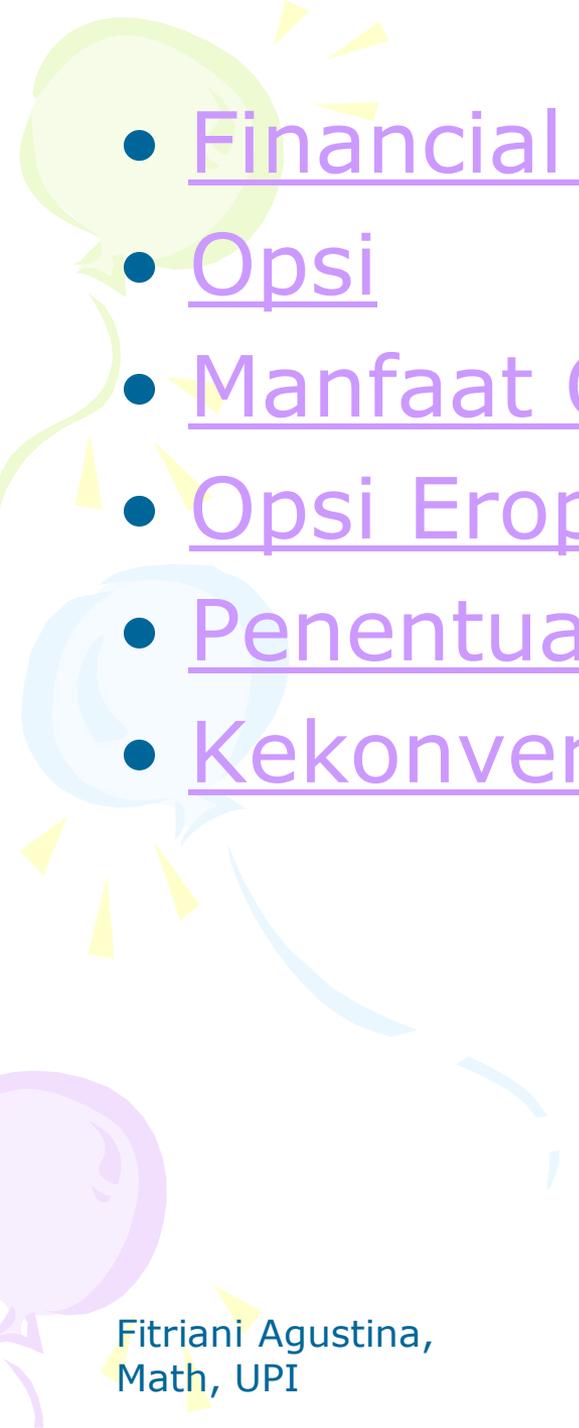


***KEKONVERGENAN MODEL
BINOMIAL UNTUK
PENENTUAN HARGA OPSI
EROPA***

- 
- Financial Derivative
 - Opsi
 - Manfaat Opsi
 - Opsi Eropa
 - Penentuan Harga Opsi
 - Kekonvergenan Model Binomial

- *Financial derivative* adalah kontrak yang disepakati untuk menjual atau membeli suatu aset dengan harga tertentu pada waktu yang telah ditentukan di masa datang atau selama interval waktu khusus.
- *Financial derivative* dapat dikategorikan dalam 3 kelompok, yaitu *forward* dan *future*, *swap*, dan opsi (*option*).



- Opsi (*option*) adalah suatu kontrak antara *writer* dan *holder* yang memberikan hak, bukan kewajiban, kepada *holder* untuk membeli atau menjual suatu aset pokok (*underlying asset*) pada atau sebelum suatu tanggal tertentu untuk suatu harga tertentu.
- Perbedaan utama antara opsi dan bentuk lain dari *financial derivative* adalah tidak adanya kewajiban bagi *holder*.
- Opsi dapat dikelompokkan menjadi dua kategori utama tergantung pada apakah hak *holder* adalah membeli (opsi *call*) atau menjual (opsi *put*).

- Opsi call memberikan hak, bukan kewajiban kepada *holder* untuk membeli aset pokok dari *writer* pada harga yang sudah disepakati dan hak *holder* tersebut berakhir pada waktu yang telah ditentukan.
- Opsi put memberikan hak, bukan kewajiban kepada *holder* untuk menjual aset pokok dari *writer* pada harga yang sudah disepakati dan hak *holder* tersebut berakhir pada waktu yang telah ditentukan.
- Sebaliknya *writer* mempunyai kewajiban yaitu harus menjual atau membeli aset pokok kecuali *holder* memutuskan untuk membiarkan opsinya tidak bernilai.

- Beberapa ekspresi yang digunakan untuk menggambarkan keadaan suatu opsi, yaitu *in-the-money*, *at-the-money*, dan *out-of-the-money*
- Dalam dunia *investor* dan *trader* (*trading at financial market*), opsi hanya di-*exercise* ketika nilai selisihnya lebih besar dari nol, dikatakan bahwa opsi adalah *in-the-money*.

- Berdasarkan waktu jatuh tempo, opsi dibagi menjadi dua jenis, yaitu opsi Eropa dan opsi Amerika.
- Opsi Eropa berarti opsi tersebut dapat di-*exercise* hanya pada waktu jatuh tempo, sedangkan opsi Amerika dapat di-*exercise* setiap saat hingga waktu jatuh tempo.

Terdapat 2 manfaat dari opsi, antara lain :

- *Hedging*, merupakan upaya untuk membatasi kerugian yang mungkin muncul dari kepemilikan sebuah aset, melindungi nilai aset agar pada saat nilai aset tersebut mengalami penurunan, pemilik aset (*holder*) tidak mengalami kerugian yang besar. Pembelian opsi *put* merupakan salah satu contoh dari *hedging*.
- Spekulasi, merupakan upaya untuk memperoleh keuntungan dengan bertaruh apakah harga suatu aset akan naik atau turun. Pembelian opsi *call* merupakan salah satu contoh dari spekulasi.

- Opsi Eropa adalah suatu kontrak keuangan yang memberikan hak, bukan kewajiban, kepada *holder* untuk membeli atau menjual aset pokok dari *writer* pada saat jatuh tempo dengan harga yang sudah ditentukan.
- *Opsi call Eropa memberikan hak bagi holder untuk membeli suatu saham hanya pada saat exercise date T dengan strike price K .*
- *Opsi put Eropa memberikan hak bagi holder untuk menjual suatu saham hanya pada saat exercise date T dengan strike price K .*

- Masalah penentuan harga opsi (*option pricing*) adalah menghitung harga yang wajar (*fair value*) dimana opsi bisa dibeli atau dijual di pasar saham (*capital market*) oleh *writer*.
- Penentuan harga opsi Eropa model kontinu dilakukan dengan menggunakan rumus *Black-Scholes*.
- Penentuan harga opsi Eropa model diskrit ditentukan dengan menggunakan metode binomial.

- Penentuan harga opsi dengan metode binomial merupakan aproksimasi dari penentuan harga opsi Black-Scholes pada saat $n \rightarrow \infty$
- *error* (galat) adalah selisih antara harga opsi *Black-Scholes* dengan harga opsi metode binomial.
- Sifat yang menarik mengenai *error* (galat) ini adalah bagaimana memahami kekonvergenan harga opsi metode binomial terhadap harga opsi *Black-Scholes*.

- Rumus *Black-Scholes* untuk harga opsi *call* Eropa pada saat t dengan *strike price* K dan *exercise date* T serta tanpa *dividend*, yaitu:

$$C_E(t, S_t) = S_t N(d_1) - K \exp[-r(T-t)] N(d_2)$$

- Rumus *Black-Scholes* untuk harga opsi *put* Eropa pada saat t dengan *strike price* K dan *exercise date* T serta tanpa *dividend*, yaitu:

$$P_E(t, S_t) = K \exp[-r(T-t)] N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

- Metode binomial yang digunakan pada penentuan harga opsi Eropa ini adalah metode binomial yang dikemukakan oleh *Cox, Ross and Rubinstein*
- Rumus *Cox-Ross-Rubinstein* untuk menentukan harga opsi *call Eropa*

$$C_0 = S_0 \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} (p^*)^j (q^*)^{n-j} - \frac{K}{e^{rT}} \sum_{j=a}^n \binom{n}{j} \tilde{p}^j \tilde{q}^{n-j}$$

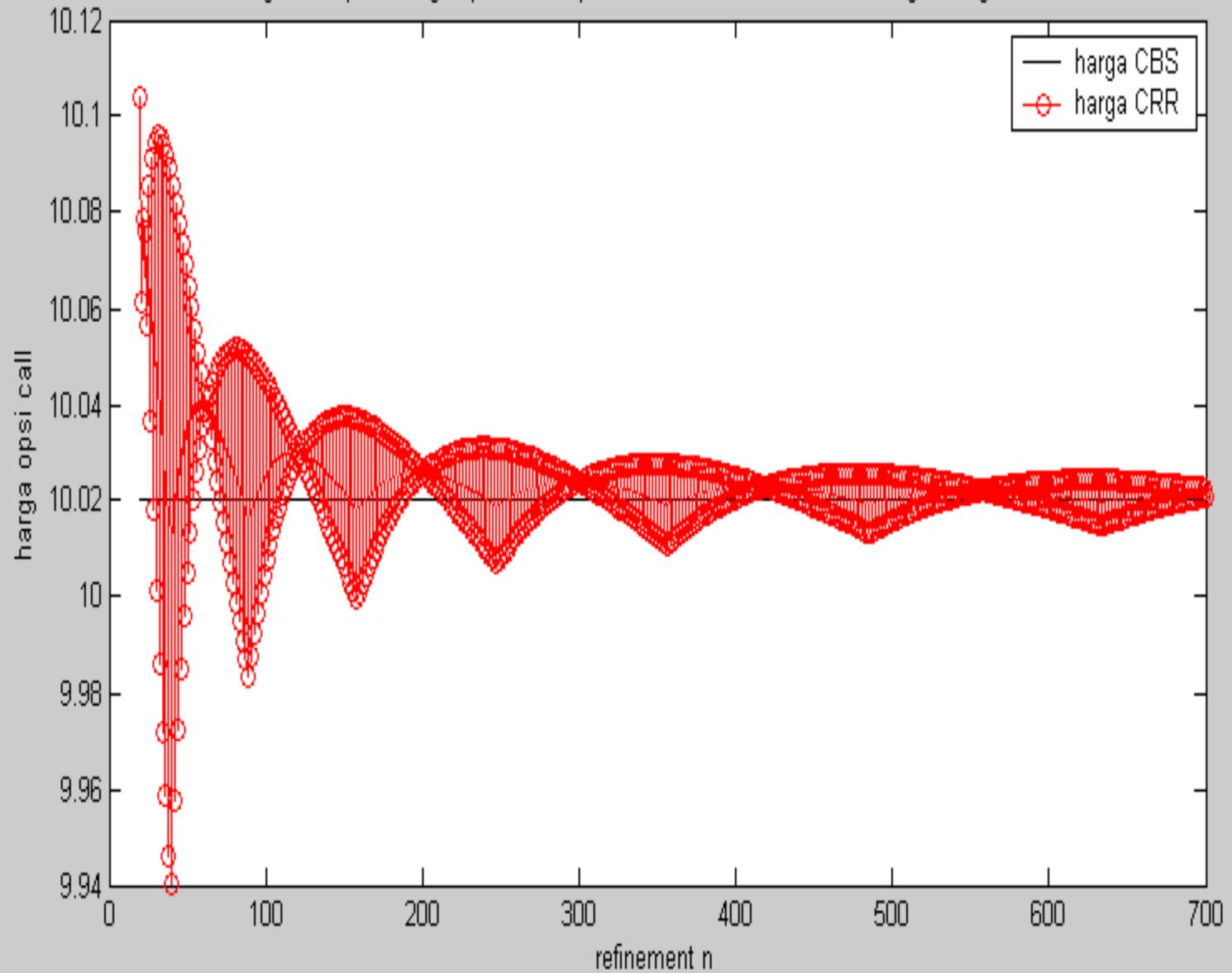
- dimana $\tilde{p} = \left[\frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \right]$, $p^* = \frac{\tilde{p} u}{e^{r\Delta t}}$, $a = \frac{\ln K - \ln S_0 - n \ln d}{\ln u - \ln d}$

- Selanjutnya *Cox, Ross, and Rubinstein* memilih nilai u dan d

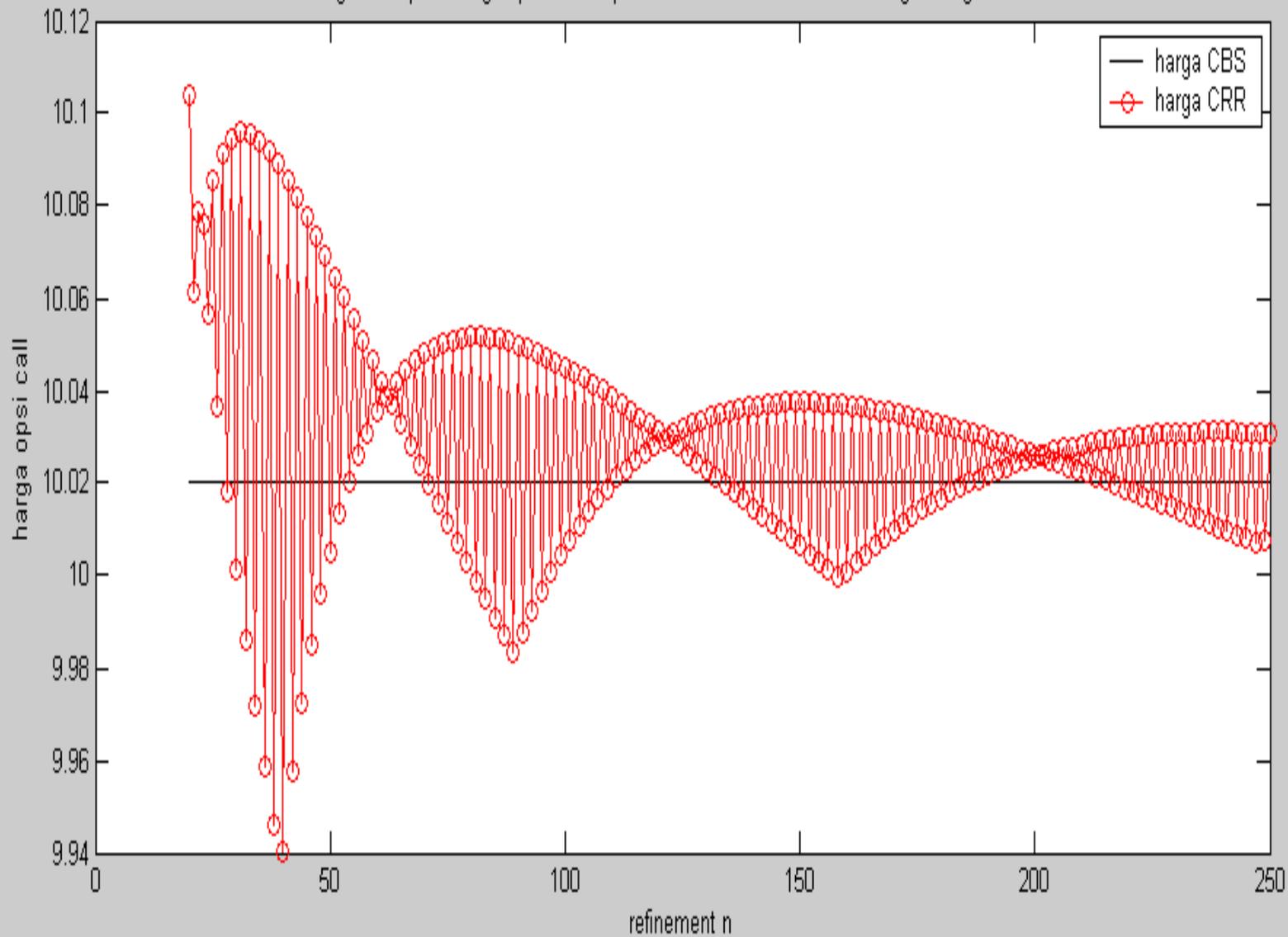
$$u = \exp(\sigma \Delta t) \quad d = \exp(-\sigma \Delta t)$$

- Simulasi penentuan harga opsi call Eropa model CRR dengan $S_0 = 100$, $K = 110$, $T = 1$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.3$, untuk $n = 20, \dots, 700$

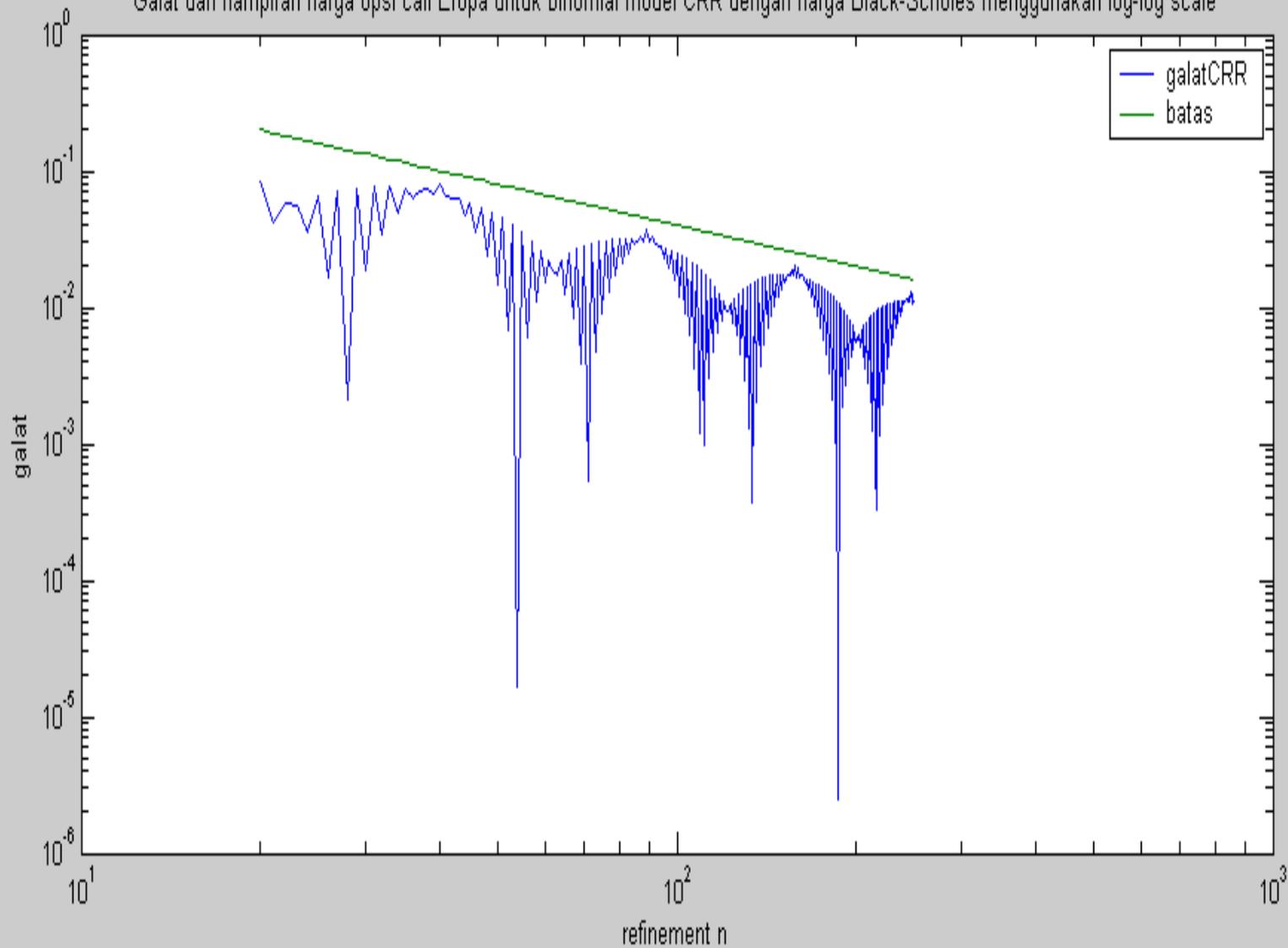
Perbandingan hampiran harga opsi call Eropa untuk binomial model CRR dengan harga Black-Scholes



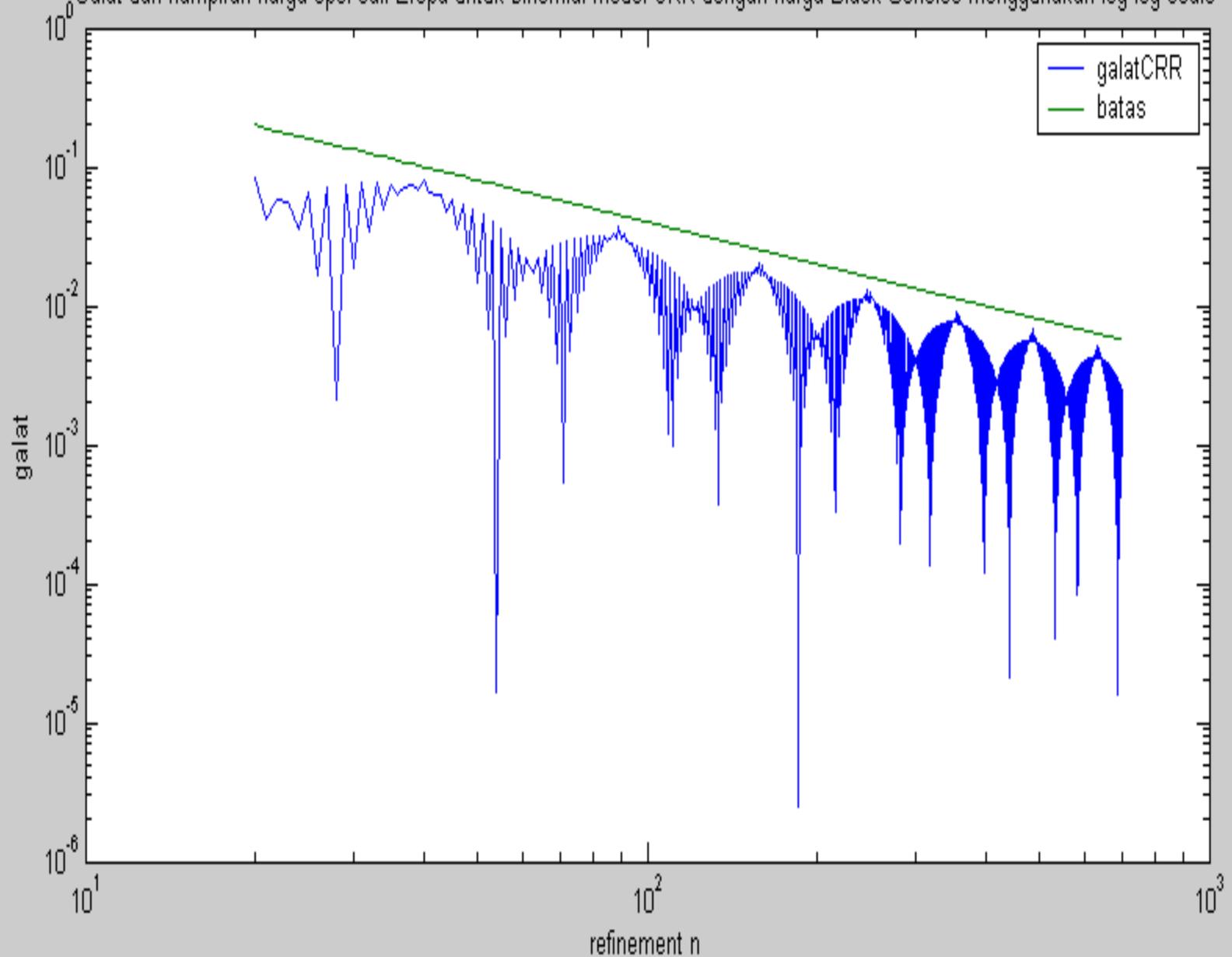
Perbandingan hampiran harga opsi call Eropa untuk binomial model CRR dengan harga Black-Scholes



Galat dari hampiran harga opsi call Eropa untuk binomial model CRR dengan harga Black-Scholes menggunakan log-log scale



Galat dari hampiran harga opsi call Eropa untuk binomial model CRR dengan harga Black-Scholes menggunakan log-log scale



- Harga opsi *call* Eropa model CRR konvergen ke harga opsi *call* Eropa *Black-Scholes*, namun kekonvergenannya tidak monoton, hal ini dapat dilihat dari grafik harga opsi Eropa model CRR yang bergerak naik turun.
- Order kekonvergenan dari harga opsi Eropa model CRR diperoleh dengan menentukan batas atas dari *error* (galat).

- Harga opsi *call* Eropa model CRR dikatakan konvergen dengan order $\rho > 0$, apabila ada konstanta κ sedemikian sehingga

$$e_n \leq \frac{\kappa}{n^\rho}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Pada simulasi tersebut dapat dilihat bahwa harga opsi *call* Eropa model CRR konvergen ke harga opsi *call* Eropa *Black-Scholes* dengan order 1.

- Harga opsi *call* Eropa model CRR konvergen dengan order 1, dapat dibuktikan dengan menggunakan

$$e_n \leq \kappa \cdot \left\{ n \cdot (m_n^2 + m_n^3 + \mathcal{P}_n) + \frac{1}{n} \right\}$$

dengan terlebih dahulu menunjukkan:

$$m_n^2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad m_n^3 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \mathcal{P}_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$