Penaksiran Parameter

Statistika dibagi menjadi dua, yaitu:

1. Statistika Deskriftif
2. Statistik Inferensial

Penarikan kesimpulan dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu:

1. Penaksiran Parameter
2. Pengujian Hipotesis

Penaksiran Parameter

Terdapat dua jenis penaksiran, yaitu:

1. Penaksiran Titik
2. Penaksiran Interval

Sifat – sifat penaksir parameter yang baik, yaitu:

1. Tak bias
2. Variansi Minimum
3. Konsisten
4. Statistik Cukup

Statistik cukup dengan Keluarga Eksponensial

Metode - Metode Penentuan Penaksir Titik, yaitu:

1. Metode Momen
2. Metode Maksimum Likelihood
3. Penaksir Bayes

Statistik inferensial : Statistik yang dengan segala informasi dari sampel digunakan untuk menarik kesimpulan mengenai karakteristik populasi dari mana sampel itu diambil.

Penaksiran Titik

Penaksiran titik sebuah parameter : sebuah nilai yang diperoleh dari sampel dan digunakan sebagai penaksir dari parameter yang nilainya tidak diketahui.

Misalkan X_1, X_2, …, X_n merupakan sampel acak berukuran n dari X, maka statistik $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ yang berkaitan dengan θ dinamakan penaksir dari θ.

Setelah sampel diambil, nilai-nilai yang dihitung dari sampel itu digunakan sebagai taksiran titik bagi θ.

Beberapa taksiran titik yang dihitung dari data sampel untuk parameter populasi yang bersesuaian.

1. Rerata populasi μ, taksiran titiknya adalah $\hat{\mu} = \bar{x}$
2. Variansi populasi σ^2, taksiran titiknya adalah $\hat{\sigma}^2 = s^2$
3. Simpangan baku populasi σ, taksiran titiknya adalah $\hat{\sigma} = s$
4. Proporsi populasi $\pi = \dfrac{X}{N}$, taksiran titiknya adalah $\hat{\pi} = p = \dfrac{Y}{n}$

Tak Bias

$\hat{\theta}$ dikatakan penaksir tak bias bagi parameter θ, jika

$$E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$$

$\hat{\theta}$ dikatakan penaksir bias bagi parameter θ, jika

$$E\left(\hat{\theta}\right) \neq \theta$$

Namun penaksir bias dapat diubah menjadi penaksir tak bias jika ruas kanan dikalikan atau ditambahkan dengan konstanta tertentu

Contoh 1:

Misalkan X adalah peubah acak dengan rerata μ dan variansi σ^2. Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel acak berukuran n dari X, apakah rerata sampel $\overline{X}$ dan variansi sampel s^2 merupakan penaksir tak bias untuk μ dan σ^2?

Contoh 2:

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel acak berukuran n dari X yang berdistribusi seragam, $X_i \sim UNIF(\theta - 1, \theta + 1)$

Tunjukkan bahwa rerata sampel acak $\overline{X}$ merupakan penaksir tak bias bagi θ

Variansi Minimum

Apabila terdapat dua buah penaksir yang tak bias

Maka kedua penaksir tersebut akan dibandingkan

dalam hal variansinya.

Misalkan dua penaksir tak bias yaitu $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ untuk θ

Jika $\hat{\theta}_1$ mempunyai variansi yang lebih kecil dibanding

dengan $\hat{\theta}_2$,maka $\hat{\theta}_1$ dikatakan penaksir tak bias

bervariansi minimum

Sebuah penaksir tak bias akan mencapai variansi minimum di antara semua penaksir tak bias lainnya, jika variansi dari penaksir itu minimal sama dengan batas bawah Cramer-Rao

Perumusan batas bawah Cramer-Rao untuk variansi dari $\hat{\theta}$ adalah

$$Var\left(\hat{\theta}\right) \geq \frac{1}{n \cdot E\left[\frac{d}{d\theta} \ln f\left(x;\theta\right)\right]^2} = \frac{1}{-n \cdot E\left[\frac{d^2}{\left(d\theta\right)^2} \ln f\left(x;\theta\right)\right]}$$

Contoh 1:

Apakah rerata sampel $\overline{X}$ merupakan penaksir tak bias bervariansi minimum untuk rerata distribusi normal dengan variansi diketahui.

Contoh 2:

Misalkan X_1, X_2, …, X_n merupakan sampel acak berukuran n dari X yang berdistribusi poisson, $X_i \sim POI(\mu)$

Tentukan batas bawah Cramer-Rao untuk variansi penaksir tak bias dari μ

Konsisten

Jika $\hat{\theta}_n$ adalah penaksir untuk θ yang didasarkan pada sampel acak berukuran n,maka $\hat{\theta}_n$ dikatakan konsisten bagi parameter θ, jika

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Penentuan penaksir konsisten ini dapat dilakukan dengan menggunakan ketidaksamaan Chebyshev's,

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|X - \mu\right| < k\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Contoh 1:

Misalkan peubah acak X berdistribusi N(μ, σ^2), dengan σ^2 diketahui. Apakan rerata sampel $\overline{X}$ merupakan penaksir konsisten bagi rerata distribusi yaitu μ?

Statistik Cukup

Statistik $T = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ dikatakan cukup bagi parameter $\theta \in \Theta$, jika fkp bersyarat:

$$P\left(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n \middle| T\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)\right) = t$$

tidak bergantung pada θ.

Contoh:

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan n peubah acak Bernoulli yang saling bebas dengan $P(X_i = 1) = p$ dan $P(X_i = 0) = (1 - p)$, i = 1, 2, …, n. Perlihatkan bahwa $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ merupakan statistik cukup bagi p.

Keluarga Eksponensial

Penetuan statistik cukup bagi suatu parameter dapat dapat dilakukan dengan menggunakan keluarga eksponensial.

Keluarga eksponensial yang akan dibahas di sini adalah keluarga eksponensial untuk satu parameter.

1. Suatu fkp dengan satu parameter dikatakan termasuk ke dalam keluarga eksponensial, jika fkp tersebut dapat diuraikan dalam bentuk:

$$f(x;\theta) = C(\theta) \cdot \exp\left[Q(\theta) \cdot T(x)\right] \cdot h(x)$$

$$x \in \Re,\ \theta \in \Theta(\subset \Re)$$

2. Jika X_1, X_2, …, X_n merupakan sampel acak yang berasal dari distribusi dengan fkp gabungannya dinotasikan dengan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$

$$f(x_1, \cdots, x_n; \theta) = C^n(\theta) \cdot \exp\left[Q(\theta) \sum_{j=1}^{n} T(x_j)\right] \cdot h(x_1) \cdot \cdots \cdot h(x_n)$$

maka $f(x;\theta)$ dikatakan termasuk keluarga eksponensial

Contoh:

Misalkan peubah acak X berdistribusi binomial

$\overline{X}$

dengan parameter n dan θ. Apakah f(x;θ) termasuk keluarga eksponensial?

Contoh:

Misalkan X_1, X_2, …, X_n merupakan sampel acak dari distribusi B(n;θ). Apakah f(x;θ) termasuk keluarga eksponensial?

Metode Momen

Misalkan X adalah peubah acak kontinu (diskrit) dengan fkp berbentuk $f(x;\theta_1,\ldots,\theta_k)$, dengan $\theta_1,\ldots,\theta_k$ adalah k buah parameter yang tidak diketahui. Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sebuah sampel acak berukuran n dan didefinisikan k buah momen sekitar pusat sampel pertama:

$$m_t' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^t; \qquad t = 1, 2, \cdots, k$$

Selanjutnya k buah momen sekitar populasi pertama:

$$\mu_t' = E\left(X^t\right)$$

Contoh:

Misalkan X peubah acak berdistribusi B(1;θ) dengan θ tidak diketahui. Tentukan penaksir titik untuk θ dengan menggunakan metode momen?

Contoh:

Dengan menggunakan metode momen, tentukan estimator untuk θ berdasarkan sampel acak X_1, X_2, …, X_n yang mempunyai fkp:

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\ \theta>0\\ 0 & , lainnya\end{cases}$$

Metode Maksimum Likelihood

Metode maksimum likelihood merupakan metode terbaik yang dapat digunakan dalam menentukan penaksir titik sebuah parameter.

Misalkan X adalah peubah acak kontinu (diskrit) dengan fkp berbentuk $f(x;\theta)$, dengan θ adalah suatu parameter yang tidak diketahui.

Misalkan X_1, X_2, …, X_n merupakan sebuah sampel acak berukuran n, fungsi likelihood dari sampel acak itu adalah:

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdots f(x_n, \theta)$$

Fungsi likelihood adalah fungsi dari parameter yang tidak diketahui θ. Untuk memudahkan dalam menganalisa maka fungsi likelihood L(θ) diberi ln. Penaksir maksimum likelihood dari θ adalah nilai θ yang memaksimumkan fungsi likelihood L(θ).

Contoh:

Misalkan $X_1,X_2,\ldots,X_n$ adalah sampel acak berukuran n dari distribusi B(1,θ), dengan θ tidak diketahui. Tentukan penaksir titik untuk θ denganmenggunakan metode maksimum likelihood?

Contoh:

Dengan menggunakan metode maksimum likelihood Tentukan estimator untuk θ berdasarkan sampel acak X_1, $X_2,\ldots$, X_n yang berdistribusi

$$X_i \sim GEO(p)$$

Pada MME dan MLE parameter-parameter yang akan diestimasi adalah konstanta-konstanta yang tidak diketahui.

Pada Bayesian parameter-parameter yang akan diestimasi dipandang sebagai variabel-variabel random yang mempunyai distribusi awal yaitu distribusi prior $\lambda(\theta)$.

Penaksir Bayes

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sebuah sampel acak berukuran n yang berasal dari distribusi dengan fkp f(x;θ); $\theta \in \Omega \subset \Re$

Langkah-langkah untuk menentukan penaksir Bayes bagi θ adalah:

1. Tentukan fkp gabungan dari sampel acak, yaitu

$$g(x_1, \cdots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \cdot \cdots \cdot f(x_n; \theta)$$

2. Tentukan distribusi prior, dengan fkpnya λ(θ) diambil/dipilih dan disesuaikan dgn $g(x_1, \ldots, x_n; \theta)$

3. Penaksir Bayes untuk θ ditentukan sbb:

   a. Jika λ(θ) dari peubah acak Θ berasal dari peubah acak diskrit, maka penaksir bayes ditentukan dengan rumus sbb:

$$\delta\left(x_1,\cdots,x_n;\theta\right)=\frac{\sum_{\Omega}\theta\cdot g\left(x_1,\cdots,x_n;\theta\right)\cdot\lambda\left(\theta\right)}{\sum_{\Omega}g\left(x_1,\cdots,x_n;\theta\right)\cdot\lambda\left(\theta\right)}$$

b. Jika λ(θ) dari peubah acak Θ berasal dari peubah acak kontinu, maka penaksir bayes ditentukan dengan rumus sbb:

$$\delta(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\frac{\int_{\Omega}\theta\cdot g(x_1,\cdots,x_n;\theta)\cdot\lambda(\theta)\,d\theta}{\int_{\Omega}g(x_1,\cdots,x_n;\theta)\cdot\lambda(\theta)\,d\theta}$$

Sedangkan penentuan distribusi posteriornya digunakan rumus:

$$h(\theta|x)=\frac{g(x_1,\cdots,x_n;\theta)\cdot\lambda(\theta)}{\int_{\Omega}g(x_1,\cdots,x_n;\theta)\cdot\lambda(\theta)\,d\theta}$$

Contoh:

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel acak berukuran n dari distribusi $B(1,\theta)$, dengan θ tidak diketahui.

Tentukan penaksir Bayes untuk θ.