POLINOM (SUKU BANYAK)

Standar Kompetensi:

Menggunakan aturan suku banyak dalam penyelesaian masalah.

Kompetensi Dasar:

1. Menggunakan algoritma pembagian suku banyak untuk menentukan hasil bagi dan sisa pembagian.
2. Menggunakan teorema sisa dalam penyelesaian masalah.
3. Menggunakan teorema faktor dalam penyelesaian masalah.

1. Suku Banyak, Nilai suatu Suku Banyak

$x^2 + 5x - 2$ dan $2x^5 - 6x^3 + 11x$ dinamakan **suku banyak** (polinom) dalam x yang masing-masing berderajat dua dan lima. **Derajat** suatu suku banyak dalam x adalah pangkat tertinggi dari x dalam suku banyak itu.

Jika $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ adalah konstanta, maka:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

adalah suku banyak dalam x yang berderajat n, jika n bilangan cacah dan $a_n \neq 0$.

Perhatikan, bahwa dalam suatu suku banyak semua pangkat lebih besar atau sama dengan nol. Bilangan a_k dinamakan **koefisien** suku x^k dan a_0 dinamakan **suku tetap**.

Contoh:

$8x^3 + 5x - 2$, koefisien x^3 adalah 8, koefisien x^2 adalah 0, koefisien x adalah 5, dan suku tetap adalah -2.

Suatu bentuk $(1 - x)(2 + x + x^2) + 3x + 7$ juga dinamakan suku banyak karena dapat ditulis $-x^3 + 2x + 9$. Dengan menyatakan suku banyak dengan f(x), maka **nilai** suku banyak itu jika x diganti dengan 1 (cara subtitusi) adalah f(1),

$$f(x) = -x^3 + 2x + 9$$

$$f(1) = -(1)^3 + 2(1) + 9 = -1 + 2 + 9 = 10.$$

2. Cara Lain untuk Menghitung Nilai Suku Banyak

Misalkan $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dan akan dihitung $f(h)$. Dengan cara subtitusi harus dihitung nilai $f(h) = ah^3 + bh^2 + ch + d$. Sekarang $ah^3 + bh^2 + ch + d$ dapat dinyatakan dalam bentuk: $ah^3 + bh^2 + ch + d = (ah^2 + bh + c)\ h + d$

$$= [(ah + b)h + c]h + d$$

Dengan membalik proses itu maka kita dapat membentuk $ah^3 + bh^2 + ch + d$ dengan cara sebagai berikut:

a. Kalikan a dengan h dan tambahkanlah b maka didapat $ah + b$.
b. Kalikanlah $ah + b$ dengan h dan tambahkanlah c maka didapat $ah^2 + bh + c$.
c. Kalikanlah $ah^2 + bh + c$ dengan h dan tambahkanlah d maka didapat $ah^3 + bh^2 + ch + d$.

Cara mengalikan dan menjumlahkan itu dapat disusun dalam skema berikut ini:

$$\begin{array}{c|cccc}
h & a & b & c & d \\
 & & ah & ah^2 + bh & ah^3 + bh^2 + ch \\
\hline
 & a & ah + b & ah^2 + bh + c & \boxed{ah^3 + bh^2 + ch + d = f(h)}
\end{array} \; +$$

Cara seperti ini disebut **cara sintetik**.

Contoh:

Hitunglah $f(2)$ jika $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 18$.

Jawab:

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 2 & 4 & 0 & -18 \\
 & & 4 & 16 & 32 \\
\hline
 & 2 & 8 & 16 & \boxed{14 = f(2)}
\end{array} \; +$$

3. Pembagian Suku Banyak

Contoh:

Hitunglah 3693 : 15 dalam bentuk panjang.

Jawab:

$$
\begin{array}{r r l}
 & 246 & \\
15 & \overline{\big)\,3693} & \\
 & \underline{3000} & - \\
 & 693 & \\
 & \underline{600} & - \\
 & 93 & \\
 & \underline{90} & - \\
 & 3 &
\end{array}
$$

Pembagian ini menunjukkan:

$$
\begin{aligned}
3693 &= (15 \text{ x } 200) + 693 \\
&= (15 \text{ x } 200) + (15 \text{ x } 40) + 93 \\
&= (15 \text{ x } 200) + (15 \text{ x } 40) + (15 \text{ x } 6) + 3 \\
&= (15 \text{ x } 246) + 3
\end{aligned}
$$

Pembagian berhenti karena sisanya 3 kurang dari 15.

Jadi, 3693 = (15 x 246) + 3.

Pada pembagian tersebut:

15 dinamakan **pembagi**,

246 dinamakan **hasil bagi**,

3 dinamakan **sisa**.

Contoh:

Bagilah $2x^2 + 3x – 4$ dengan $x – 2$.

Jawab:

$$\begin{array}{r|l l}
 & 2x + 7 & \\
\hline
x - 2 & 2x^2 + 3x - 4 & \\
 & 2x^2 - 4x & \\
\cline{2-2}
 & \quad\;\; 7x - 4 & - \\
 & \quad\;\; 7x - 14 & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad 10 & -
\end{array}$$

Pembagian ini menunjukkan:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 4 &= (x - 2)2x + 7x - 4 \\ &= (x - 2)2x + (x - 2)7 + 10 \\ &= (x - 2)(2x + 7) + 10 \end{aligned}$$

Pembagian berhenti karena sisanya 10, berderajat lebih rendah daripada $x - 2$.

Jadi, $2x^2 + 3x – 4 = (x – 2)(2x + 7) + 10$.

Pada pembagian tersebut:

$x – 2$ dinamakan **pembagi**,

$2x + 7$ dinamakan **hasil bagi**,

10 dinamakan **sisa**.

A. Menentukan nilai $ax^3 + bx^2 + cx + d$ jika x diganti h dengan cara sintetik.

$$
\begin{array}{c|cccc}
h & a & b & c & d \\
 & & ah & ah^2 + bh & ah^3 + bh^2 + ch \\
\hline
 & a & ah + b & ah^2 + bh + c & \boxed{ah^3 + bh^2 + ch + d = f(h)}
\end{array}
\quad +
$$

B. Pembagian bentuk panjang suku banyak tersebut oleh x – h.

$$
\begin{array}{r|llll}
 & ax^2 & + (ah + b)x & + (ah^2 + bh + c) & \\
\cline{2-4}
x - h & ax^3 + bx^2 & + cx & + d & \\
 & ax^3 - ahx^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & (ah + b)x^2 & + cx & & - \\
 & (ah + b)x^2 - (ah^2 + bh)x & & & \\
\cline{2-4}
 & & (ah^2 + bh + c)x & + d & - \\
 & & (ah^2 + bh + c)x - (ah^3 + bh^2 + ch) & & \\
\cline{3-4}
 & & & ah^3 + bh^2 + ch + d = \text{sisa} & -
\end{array}
$$

Bandingkan kedua perhitungan tersebut, maka tampak bahwa jika $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dibagi dengan x – h:

a. Sisa pembagian adalah $f(h) = ah^3 + bh^2 + ch + d$.
b. Koefisien hasil bagi $ax^2 + (ah + b)x + (ah^2 + bh + c)$ tepat sama dengan bilangan-bilangan yang terjadi pada baris terbawah pada perhitungan cara sintetik (A).

Ternyata perhitungan cara sintetik merupakan cara yang sangat singkat dan skematik untuk menunjukkan pembagian dengan x – h.

Contoh:

Tentukanlah hasil bagi dan sisa pada pembagian $3x^3 - 5x + 10$ dengan $x - 2$.

Jawab:

$f(x) = 3x^3 - 5x + 10 = 3x^3 + 0x^2 - 5x + 10$

Pembagi: $x - 2$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & 0 & -5 & 10 \\ & & 6 & 12 & 14 \\ \hline & 3 & 6 & 7 & \boxed{24} \end{array} +$$

Hasil baginya: $3x^2 + 6x + 7$ dan sisanya: 24

Jadi: $f(x) = (x - 2)(3x^2 + 6x + 7) + 24$

4. Teorema Sisa

Jika suatu suku banyak f(x) dibagi dengan x – h maka hasil baginya asalah suatu suku banyak yang lain yang dapat dinyatakan dengan H(x). Sisa S akan merupakan suatu konstanta. Persamaan dasar yang menghubungkan f(x) dengan (x – h), H(x), dan S adalah:

$f(x) = (x - h)\,H(x) + S$, yang benar untuk semua x.

Teorema:

Jika suku banyak f(x) dibagi x – h, maka sisa pembagiannya adalah f(h).

Bukti:

f(x) dibagi (x – h). Misalkan hasil baginya H(x) dan sisanya S. Derajat S lebih rendah satu derajat daripada derajat (x – h), karena itu S merupakan konstanta.

$f(x) = (x - h)\,H(x) + S$, untuk semua x.

ganti x dengan h, maka didapat:

$f(h) = (h - h)\,H(h) + S$

$= 0\,H(h) + S$

$= S$

Jadi, f(h) = S ..… (terbukti)

Contoh:

Tentukan sisa pembagian $x^3 - 3x + 5$ oleh $(x + 2)$.

Jawab:

Cara 1 (subtitusi)

$f(x) = x^3 - 3x + 5$

$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 5$

$= -8 + 6 + 5$

$= 3$

Jadi sisanya 3.

Cara 2 (sintetik)

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & 0 & -3 & 5 \\
 & & -2 & 4 & -2 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & \boxed{3}
\end{array}
\; +
$$

Jadi sisanya 3.

Catatan:

Jika yang ditanyakan hanya sisanya maka cara subtitusi adalah mudah asalkan pengganti x merupakan bilangan-bilangan bulat yang sederhana, misalnya -1, 0, 1, 2. Cara 2 pada umumnya lebih baik.

5. Pembagian Suku Banyak dengan (ax – b)

Pembagi: $ax - b = a(x - \frac{b}{a})$.

Pembagian f(x) dengan $(x - \frac{b}{a})$ hasil baginya H(x) dan sisanya $f(\frac{b}{a})$.

Karena itu:
$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x - \tfrac{b}{a})\, H(x) + f(\tfrac{b}{a}) \\
&= \tfrac{a}{a}(x - \tfrac{b}{a})\, H(x) + f(\tfrac{b}{a}) \\
&= (ax - b)\,\frac{H(x)}{a} + f(\tfrac{b}{a})
\end{aligned}
$$

Contoh:

Tentukanlah hasil bagi H(x) dan sisanya S, jika $f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x - 1$ dibagi $2x - 1$.

Jawab:

$f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x - 1$

Pembagi: $2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})$

$$
\begin{array}{c|cccc}
\frac{1}{2} & 2 & 1 & 5 & -1 \\
 & & 1 & 1 & 3 \\
\hline
 & 2 & 2 & 6 & \boxed{2}
\end{array}
\quad +
$$

$f(x) = (x - \frac{1}{2})(2x^2 + 2x + 6) + 2$

$\quad = (2x - 1)(x^2 + x + 3) + 2$

Jadi, hasil baginya $H(x) = x^2 + x + 3$ dan sisanya $S = 2$.

6. Pembagian Suku Banyak dengan (x – a)(x – b)

Pembagi: (x – a)(x – b) = x^2 – (a + b)x + ab, berderajat dua.

Derajat S lebih rendah satu derajat daripada derajat (x – a)(x – b), karena itu S adalah (px + q).

Jadi: f(x) = (x – a)(x – b) H(x) + (px + q)

Contoh:

Suku banyak f(x) jika dibagi dengan (x – 1) bersisa 2, dan jika dibagi dengan (x + 2) bersisa -1. Tentukan sisanya jika f(x) dibagi (x – 1)(x – 2)

Jawab:

f(x) = (x – 1)(x – 2) H(x) + (px + q)

f(x) dibagi (x – 1) sisanya 2 $\Rightarrow$ f(1) = p + q = 2

f(x) dibagi (x + 2) sisanya -1 $\Rightarrow$ f(-2) = -2p + q = -1 –

$$
\begin{aligned}
3p &= 3 \\
p &= 1 \\
\\
1 + q &= 2 \\
q &= 1
\end{aligned}
$$

Jadi f(x) dibagi (x – 1)(x – 2) sisanya x + 1

7. Teorema Faktor

Teorema:

Jika f(x) suatu suku banyak, maka f(h) = 0 $\Leftrightarrow$ (x – h) merupakan faktor dari f(x).

Bukti:

$\Rightarrow$ Menurut teorema sisa f(x) = (x – h) H(x) + f(h)

Jika f(h) = 0 maka f(x) = (x – h) H(x)

Berarti bahwa (x – h) merupakan faktor dari f(x)

$\Leftarrow$ Jika (x – h) merupakan faktor dari f(x) maka: f(x) = (x – h) H(x)

x diganti h, maka didapat:

$$\begin{aligned} f(h) &= (h - h)\,H(h) \\ &= 0\,H(h) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi: f(h) = 0 $\Leftrightarrow$ (x – h) merupakan faktor dari f(x)

Contoh:

Tentukanlah faktor-faktor dari $2x^3 + x^2 - 13x + 6$.

Jawab:

Perhatikanlah jika x – h merupakan faktor suku banyak itu, maka h merupakan faktor dari 6, yaitu: ±1, ±2, ±3, ±6. Kita mencoba nilai-nilai itu.

$f(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 13(1) + 6 = -4 \neq 0$, (x – 1) bukan faktor f(x).

$f(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 13(-1) + 6 = 18 \neq 0$, (x – (-1)) bukan faktor f(x).

$f(2) = 2(2)^3 + (2)^2 - 13(2) + 6 = 0$, (x – 2) faktor f(x).

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$

Pembagi: (x – 2)

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & 1 & -13 & 6 \\ & & 4 & 10 & -6 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & \boxed{0 = f(2)} \end{array} \; +$$

Hasil baginya: $2x^2 + 5x - 3$

$f(x) = (x - 2)(2x^2 + 5x - 3) = (x - 2)(2x - 1)(x + 3)$

Jadi faktor-faktornya adalah (x – 2), (2x – 1), (x + 3).

8. Akar-Akar Rasional dari persamaan Suku Banyak

Dari bagian sebelumnya (teorema faktor) diperoleh:

Jika f(x) suatu suku banyak, maka f(h) = 0 $\Leftrightarrow$ (x – h) merupakan faktor dari f(x).

Sedangkan:

f(h) = 0 $\Leftrightarrow$ h akar persamaan f(x) = 0.

Kesimpulan:

Jika f(x) adalah suatu suku banyak, maka (x – h) faktor dari f(x) $\Leftrightarrow$ h akar persamaan f(x) = 0.

Contoh:

Tentukan akar-akar persamaan $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

Jawab:

$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Faktor dari 2 adalah: ±1, ± 2. Kita mencoba nilai-nilai itu.

$f(1) = 1^3 - 2(1)^2 - 1 + 2 = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$

f(1) = 0 $\Leftrightarrow$ 1 merupakan akar persamaan f(x) = 0

f(x) dibagi x – 1

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0 = f(2)} \end{array} \; +$$

Hasil baginya: $x^2 - x - 2$

Jadi persamaannya: $(x - 1)(x^2 - x - 2) = 0$

$(x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0$

$x = \pm 1$ atau $x = 2$

Jadi akar-akar persamaan $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ adalah -1, 1, 2.