SUMMARY
ALJABAR LINEAR

SUMANANG MUHTAR GOZALI

KBK ANALISIS

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
BANDUNG

2010

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Segala puji bagi Allah Rabb semesta alam. Shalawat serta salam bagi Rasulullah Muhammad *shallallahu alaihi wasallam*. Tulisan ini memuat ringkasan penting materi Aljabar Linear dalam bentuk pointer. Uraian dibuat sebagai materi refresh bagi para mahasiawa. Terakhir, Penulis berharap semoga tulisan ini bermanfaat, khususnya bagi para pembaca yang berminat dalam bidang aljabar.

Bandung, Maret 2010

Penulis,

Sumanang Muhtar Gozali

DAFTAR ISI

BAB 1

Sistem Persamaan Linear dan Matriks

1.1 Sistem Persamaan Linear

1. Sistem persamaan linear (SPL) yang terdiri dari m buah persamaan dan n buah variabel dapat dituliskan dalam bentuk persamaan matriks

$$AX = B$$

dimana A adalam matriks real berukuran $m \times n$, $X = (x_1, ..., x_n)^t$, dan $B = (b_1, ..., b_n)^t$. Jika $B = 0$ sistem di atas disebut SPL *homogen*.

2. Teknik mendapatkan solusi SPL adalah dengan mengubah matriks lengkap $(A|B)$ ke bentuk eselon baris $(A'|B')$ dan melakukan substitusi balik. Setiap kolom pada A' yang tidak mempunyai 1 utama memunculkan sebuah parameter pada variabel bersangkutan.

3. Banyaknya baris tak nol pada matriks eselon baris A' disebut rank dari A, dinotasikan $rank(A)$. Dalam hal ini kita mempunyai teorema bahwa:
Suatu SPL $AX = B$ mempunyai solusi jika dan hanya jika $rank(A) = rank(A|B)$.

4. SPL $AX = B$ dengan n buah variabel mempunyais solusi tunggal jika dan hanya jika $rank(A) = n$. Jika $rank(A) < n$ maka SPL mempunyai solusi tak

hingga banyak dengan parameter yang terlibat sebanyak $n - rank(A)$.

5. SPL homogen $AX = 0$ dimana A berukuran $m \times n$ dan $n > m$ selalu mempunyai solusi tak hingga banyak. Banyaknya parameter yang terlibat adalah $n - rank(A)$.

6. Pada SPL homogen $AX = 0$ dimana A berukuran $n \times n$ berlaku:
   SPL mempunyai solusi tunggal jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.
   Jika $\det(A) = 0$ maka SPL di atas mempunyai solusi tak hingga banyak.

1.2 Operasi Pada Matriks

1.2.1 Determinan

1. Untuk sebarang dua matriks $A, B \in M_{n\times n}$ berlaku
$$\det(AB) = \det(A). \det(B).$$

2. Jika $A \in M_{n\times n}$ maka berlaku
$$\det(kA) = k^n \det(A).$$

3. Jika $\det(A) \neq 0$ maka
$$\det(A^{-1}) = 1/\det(A).$$

4. Determinan matriks segitiga adalah perkalian entri-entri diagonal.

1.2.2 Invers

1. **Matriks kuadrat A mempunyai invers jika dan hanya jika** $\det(A) \neq 0$.

2. Jika A mempunyai invers maka A^{-1} diperoleh dengan melakukan OBE pada matriks $(A|I)$ sehingga berubah menjadi $(I|A')$. Dalam hal ini A' yang diperoleh tidak lain adalah A^{-1}.

3. Jika A mempunyai invers maka A^n juga mempunyai invers dan berlaku
$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n.$$

4. Jika $A,\ B$ masing-masing mempunyai invers maka
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.2.3 Transpose

1. Untuk sebarang dua matriks A, B yang berukuran sama berlaku
$$(A+B)^t = A^t + B^t.$$

2. Jika A berukuran $m \times n$ dan B berukuran $n \times p$ maka berlaku
$$(AB)^t = B^t A^t.$$

3. Untuk sebarang matriks kuadrat A berlaku
$$\det(A) = \det(A^t).$$

4. Jika A mempunyai invers maka A^t juga mempunyai invers dan
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

BAB 2

Ruang Vektor

2.1 Ruang dan Subruang Vektor

2.2 Kombinasi Linear, Merentang, Bebas Linear, Basis dan Dimensi

2.3 Matriks Transisi

2.4 Ruang Baris dan Ruang Kolom

BAB 3

Ruang Hasil Kali Dalam

3.1 Hasil Kali Dalam

3.2 Basis Ortonormal

1. Misalkan $B = \{u_1, ..., u_n\}$ adalah basis untuk $(V, \langle ., . \rangle)$. B disebut basis ortonormal jika memenuhi

$$\|u_i\| = 1 \ \ \forall \ \ i \text{ dan } \ \langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \text{jika } i \neq j.$$

2. Misalkan $B = \{u_1, ..., u_n\}$ adalah basis untuk $(V, \langle ., . \rangle)$. B dapat diubah menjadi basis ortonormal $B' = \{v_1, ..., v_n\}$ melalui proses Gram-Schmidt, yaitu:

   i.
$$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1$$

   ii.
$$v_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1\|}$$

   iii.
$$v_3 = \frac{u_3 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1}{\|u_3 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1\|}$$

   iv. Proses ini terus dilakukan sampai kita memperoleh

$$v_n = \frac{u_n - \langle u_n, v_{n-1} \rangle v_{n-1} - ... - \langle u_n, v_2 \rangle v_2 - \langle u_n, v_1 \rangle v_1}{\|u_n - \langle u_n, v_{n-1} \rangle v_{n-1} - ... - \langle u_n, v_2 \rangle v_2 - \langle u_n, v_1 \rangle v_1\|}$$

3. Misalkan $B = \{v_1, ..., v_n\}$ adalah basis ortonormal untuk $(V, \langle ., . \rangle)$. Untuk setiap $u \in V$ berlaku
$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_i \rangle v_i.$$

3.3 Proyeksi dan Komplemen Ortogonal

BAB 4

Transformasi Linear

Pada bab ini diasumsikan bahwa semua ruang vektor berdimensi hingga.

4.1 Transformasi Linear

1. Pemetaan $T : U \to V$ disebut transformasi linear jika memenuhi

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \text{ dan } T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

2. Jika $T : U \to V$ linear kita mendefinisikan kernel dan range dari T, masing-masing adalah

$$\ker(T) = \{x \in U \mid T(x) = 0\}$$

$$R(T) = \{T(x) \mid x \in U\}.$$

3. Misalkan $T : U \to V$ linear dan $B = \{u_1, ..., u_n\}$ adalah basis untuk U. Kita mempunyai fakta bahwa

$$R(T) = span\{T(u_i) \mid i = 1, ..., n\}.$$

4. Jika $T : U \to V$ linear maka $\ker(T)$ adalah subruang di U dan $R(T)$ adalah subruang di V. Dimensi kernel disebut nulitas T dan dimensi range disebut $rank(T)$.

5. $T : U \to V$ linear dan satu-satu *jika dan hanya jika* $\ker(T) = \{0\}$.

6. Jika $T : U \rightarrow V$ linear maka berlaku

$$\dim(U) = nulitas(T) + rank(T).$$

4.2 Matriks Transformasi

BAB 5

Diagonalisasi Matriks

5.1 Nilai dan Vektor Eigen

1. Misalkan A suatu matriks kuadrat. λ disebut nilai eigen dari A jika terdapat vektor tak nol x sehingga $Ax = \lambda x$.

2. λ adalah nilai eigen dari A *jika dan hanya jika*

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

3. Misalkan λ adalah nilai eigen dari matriks A. Ruang eigen E_λ adalah ruang solusi SPL homogen

$$(\lambda I - A)X = 0.$$

Jelas bahwa kita mempunyai

$$\dim(E_\lambda) = n - rank(\lambda I - A).$$

4. Sebarang dua buah vektor eigen yang berasal dari dua nilai eigen berbeda selalu bebas linear.

5.

5.2 Diagonalisasi

Asumsikan A berukuran $n \times n$.

1. Matriks A dikatakan dapat didiagonalkan jika terdapat matriks P sehingga

$$D = P^{-1}AP,$$

   dimana D suatu matriks diagonal. Dalam hal ini matriks P disebut pendiagonal matriks A.

2. Misalkan $v_1, ..., v_n$ adalah vektor-vektor eigen dari A yang bebas linear. Jika $P = [v_1 \; ... \; v_n]$ maka P akan mendiagonalkan A.

3. Jika A mempunyai n buah nilai eigen yang berbeda maka A dapat didiagonalkan.

4. Jika $\det(A) \neq 0$ maka 0 bukan nilai eigen dari A.

5. Jika $nulitas(A) = r > 0$ artinya 0 adalah salah satu nilai eigen dari A dan $\dim(E_0) = r$.

6. Jika A dapat didiagonalkan maka A^n juga dapat didiagonalkan. Perhatikan bahwa

$$D^n = P^{-1}A^nP.$$