Ortogonalitas di Ruang Norm-2

Sumanang Muhtar Gozali
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

Juli 2008

Ruang Norm-2

Definition

Misalkan X suatu ruang vektor real dengan dim(X)≥ 2. Suatu fungsi $\|.,.\| : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$ disebut norm-2 jika memenuhi:

N1. $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x, y bebas linear.

N2. $\|x, y\| = \|y, x\|$ untuk semua $x, y \in X$.

N3. $\|\alpha x, y\| = |\alpha|\|x, y\|$ untuk semua $x, y \in X, \alpha \in \mathbf{R}$.

N4. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ untuk semua $x, y, z \in X$.

Pasangan $(X, \|.,.\|)$ kita sebut ruang norm-2.

Example

Misalkan $X = \mathbf{R}^2$. Definisikan

$$\|x, y\| := |x_1 y_2 - x_2 y_1|, \; x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

Secara geometris, norm-2 ini merupakan luas jajaran genjang yang dibentuk oleh x dan y.

Example

Misalkan X adalah suatu ruang hasil kali dalam dengan $dim(X) \geq 2$.
Kita dapat mendefinisikan norm-2 $\|.,.\|$ di X melalui

$$\|x, y\|^2 = det \begin{bmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{bmatrix}$$

Ini yang kita sebut sebagai norm-2 baku.

Ortogonalitas di Ruang Norm

Definition

Misalkan $(X, \|.\|)$ suatu ruang norm, $x, y \in X$.

1. $x \perp^P y \;\Leftrightarrow$
$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$$
2. $x \perp^I y \;\Leftrightarrow$
$$\|x - y\| = \|x + y\|$$
3. $x \perp^{BJ} y \;\Leftrightarrow$
$$\|x\| \leq \|x + \alpha y\| \textit{ untuk semua } \alpha \in \mathbf{R}$$

Fact

Jika norm $\|.,.\|$ *diinduksi oleh hasil kali dalam* $\langle .,. \rangle$ *maka ketiga definisi ekuivalen dengan ortogonalitas biasa* ($\langle x, y \rangle = 0$).

Ortogonalitas di Ruang Norm-2

Definition

Misalkan $(X, \|.,.\|)$ ruang norm-2 dengan dimensi $n \geq 3,\ x, y \in X$.

H1. $x \perp^P y \ \Leftrightarrow$ terdapat subruang $V \subseteq X$ dengan $codim(V) = 1$ sehingga

$$\|x, z\|^2 + \|y, z\|^2 = \|x + y, z\|^2 \ \textit{untuk semua } z \in V$$

H2. $x \perp^I y \ \Leftrightarrow$ terdapat subruang $V \subseteq X$ dengan $codim(V) = 1$ sehingga

$$\|x - y, z\| = \|x + y, z\| \ \textit{untuk semua } z \in V$$

H3. $x \perp^{BJ} y \ \Leftrightarrow$ terdapat subruang $V \subseteq X$ dengan $codim(V) = 1$ sehingga

$$\|x, z\| \leq \|x + \alpha y, z\| \ \textit{untuk semua } \alpha \in \mathbf{R},\ z \in V$$

Fact

Di ruang norm-2 baku ketiga definisi ekuivalen dengan ortogonalitas biasa ($\langle x, y \rangle = 0$).

Ortogonalitas-b (versi Mazaheri)

Definition

Misalkan $(X, \|.,.\|)$ suatu ruang norm-2, $x, y \in X$.

$$x \perp^b y$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists\ b \in X \ \textit{sehingga}\ \|x, b\| \neq 0 \ \textit{dan}\ \|x, b\| \leq \|x + \alpha y, b\| \ \forall\ \alpha \in \ \mathbf{R}$$

Fact

Ortogonalitas versi Mazaheri tidak ekuivalen dengan ortogonalitas biasa di ruang norm-2 baku.

Proof.

Misalkan $X = \mathbf{R}^3$ dilengkapi dengan perkalian titik.
Definisikan

$\square$

Terima Kasih