ANALISIS REAL 2

SUMANANG MUHTAR GOZALI

KBK ANALISIS

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

BANDUNG

2010

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Segala puji bagi Allah Rabb semesta alam. Shalawat serta salam bagi Rasulullah Muhammad *shallallahu alaihi wasallam*. Tulisan ini merupakan hasil rangkuman materi kuliah Analisis Real 2 yang pernah diampu oleh Penulis. Pada dasarnya materi ini merupakan kelanjutan dari materi Analisis Real 1. Oleh karena itu, Penulis berharap pembaca dapat menangkap gagasan materi dengan mudah. Terakhir, Penulis berharap semoga tulisan ini bermanfaat, khususnya bagi para pembaca yang berminat dalam bidang matematika analisis.

Bandung, Februari 2010

Penulis,

Sumanang Muhtar Gozali

DAFTAR ISI

BAB 1

Limit dan Kekontinuan di R

Pada kuliah Analisis Real 1 kita telah mempelajari konsep barisan konvergen beserta gagasan limitnya. Sekarang kita akan membicarakan konsep yang mirip dengan limit barisan, yaitu limit fungsi. Secara umum, semua konsep analisis sangat bergantung pada konsep limit ini. Oleh karena itu perlu penguasaan mendalam terhadap berbagai hal yang terkait dengan limit.

1.1 Limit Fungsi

Pada bagian ini kita akan mempelajari konsep limit fungsi. Sebelum melangkah lebih jauh, untuk menyegarkan ingatan, perhatikan kembali fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

yang tidak terdefinisi di $x = 1$. Namun demikian kita dapat melihat bahwa jika x cukup dekat ke 1 tapi $x \neq 1$ maka $f(x)$ cukup dekat ke 2. Ini adalah contoh sederhana untuk mengingat gagasan limit fungsi.

Sekarang kita mulai dengan beberapa definisi terkait, sebelum masuk definisi formal.

Definisi Misalkan $A \subset \mathbf{R}$ dan $c \in \mathbf{R}$. Titik c disebut titik limit dari A jika untuk setiap $\delta > 0$, berlaku $V_\delta(c) \cap A \setminus \{c\} \neq \varnothing$.
Perhatikan, pada definisi di atas tidak disyaratkan bahwa c ada di A, namun di lingkungan sekecil apapun sekitar c selalu ada elemen $x \in A$ yang berbeda dari c.

Contoh Teorema (Kriteria Barisan)

Misalkan $f : A \to \mathbf{R}$ dan c suatu titik limit dari A. Maka pernyataan berikut ekuivalen:

1. $\lim_{x \to c} f = L$
2. Jika (x_n) barisan di A dengan $x_n \neq c$, $\forall\, n$ dan $(x_n) \to c$ maka $(f(x_n)) \to L$

Oleh karena itu untuk membuktikan bahwa fungsi f tidak mempunyai limit untuk x mendekati a, kita hanya membutuhkan dua buah barisan yang konvergen ke a tetapi peta barisan-barisan itu mempunyai limit berbeda.

Contoh. Buktikan bahwa fungsi

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin \frac{1}{x} & , \text{jika } x \neq 0 \\ 0 & , \text{jika } x = 0 \end{array} \right\}$$

tidak mempunyai limit untuk $x \to 0$.

Bukti. Perhatikan dua bauh barisan dengan suku masing-masing

$$a_n = \frac{2}{(4n+1)\Pi} \quad \text{dan} \quad b_n = \frac{2}{(4n+3)\Pi}.$$

Jelas bahwa kedua barisan ini konvergen ke 0. Sementara itu, $f(a_n) = 1$ dan $f(b_n) = -1$ untuk setiap n, sehingga $f(a_n) \to 1$ dan $f(b_n) \to -1$.

Kriteria Kedivergenan

1.2 Teorema Limit

Bukti.

Teorema 1.2.1 *Misalkan $A \subset \mathbf{R}$, $f, g, h : A \to \mathbf{R}$ dan c suatu titik limit dari A. Jika*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \text{untuk semua } x \in A, x \neq c$$

dan jika $\lim_{x \to c} f = L = \lim_{x \to c} h$ maka $\lim_{x \to c} g = L$.

BAB 2

Fungsi-fungsi Kontinu

Pada bab ini kita akan mempelajari salah satu jenis fungsi yang sangat penting yaitu fungsi kontinu. Kekontinuan fungsi merupakan aspek penting yang berkaitan dengan suatu fungsi. Hal ini karena kekontinuan dapat memberikan jawaban terhadap sejumlah pertanyaan terkait fungsi tersebut.

Kita akan memulai dengan definisi fungsi kontinu yang dilanjutkan dengan beragam kombinasi fungsi kontinu. Kekontinuan seragam juga akan dibahas disamping berbagai karakteristik fungsi kontinu. Di bagian akhir kita akan menyinggung fungsi monoton dan fungsi balikan.

2.1 Fungsi Kontinu

Definisi

Misalkan $f : A \to \mathbf{R}$ dan $B \subset A$. Fungsi f dikatakan kontinu di B jika f kontinu di setiap titik $x \in B$.

Kriteria Diskontinu

Misalkan $f : A \to \mathbf{R}$ suatu fungsi, dan $c \in A$. Fungsi f tidak kontinu di c *jika dan hanya jika* terdapat barisan (x_n) di A sehingga $(x_n) \to c$ tetapi $(f(x_n))$ tidak konvergen ke $f(c)$.

Latihan

1.

2.

3.

2.2 Kombinasi Fungsi Kontinu

Teorema 2.2.1 *Misalkan* $f, g : A \to \mathbf{R}$ *keduanya fungsi yang kontinu di* $c \in A$, *dan* $k \in \mathbf{R}$. *Maka*

1. $f + g,\ f - g,\ f.g,\ kf$ *semuanya kontinu di* c.
2. *Jika* $h : A \to \mathbf{R}$ *kontinu di* c *dan* $h(x) \neq 0,\ \forall\ x \in A$ *maka* f/h *juga kontinu di* c.

Teorema 2.2.2 *Misalkan* $f : A \to \mathbf{R}$, $g : B \to \mathbf{R}$ *dan* $c \in A$. *Jika* f *kontinu di* c *dan* g *kontinu di* $b = f(c) \in B$ *maka* $g \circ f$ *kontinu di* c.

Teorema 2.2.3 *Misalkan* $f : A \to \mathbf{R}$, $g : B \to \mathbf{R}$ *dan* $f(A) \subset B$. *Jika* f *kontinu di* A *dan* g *kontinu di* B *maka* $g \circ f$ *kontinu di* A.

2.3 Kekontinuan Seragam

Definisi Misalkan $f : A \to \mathbf{R}$ suatu fungsi. Fungsi f dikatakan kontinu seragam di A jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ dan untuk semua $x, c \in A$ yang memenuhi $|x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Pada definisi ini δ tidak bergantung pada c.

2.4 Teorema Nilai Rata-rata

Latihan

1.

2.

3.

2.5 Fungsi Monoton dan Teorema Fungsi Invers

Latihan

1.

2.

3.

Daftar Pustaka

[1] Bartle, R.G. (1985), *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons. Inc.

[2] Kreyszig, Erwin. (1978), *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons. Inc.

[3] Wade, W.R. (2000), *An Introduction to Analysis*, Prentice Hall.

[4] Zeidler, Eberhard (1995), *Applied Functional Analysis*, Springer-Verlag New York, Inc.