

ANALISIS REAL 1

SUMANANG MUHTAR GOZALI

KBK ANALISIS

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

BANDUNG

2010

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Segala puji bagi Allah Rabb semesta alam. Shalawat serta salam bagi Rasulullah Muhammad *shallallahu alaihi wasallam*. Tulisan ini merupakan hasil rangkuman materi kuliah Analisis Real 1 yang pernah diampu oleh Penulis. Pada dasarnya materi ini merupakan kelanjutan dari materi Kalkulus. Oleh karena itu, Penulis berharap pembaca dapat menangkap gagasan materi dengan mudah. Terakhir, Penulis berharap semoga tulisan ini bermanfaat, khususnya bagi para pembaca yang berminat dalam bidang matematika analisis.

Bandung, Februari 2010

Penulis,

Sumanang Muhtar Gozali

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	2
DAFTAR ISI	3
1 Himpunan dan Fungsi	1
1.1 Himpunan	1
1.2 Fungsi	3
2 Sistem Bilangan Real (\mathbf{R})	5
2.1 Aksioma-aksioma Bilangan Real	5
2.2 Urutan	6
2.3 Nilai Mutlak	7
3 Barisan di \mathbf{R}	9
3.1 Limit Barisan	9
3.2 Teorema Limit	9
3.3 Barisan Terbatas	10
3.4 Teorema Bolzano-Weierstrass	11
3.5 Barisan Cauchy	12

BAB 1

Himpunan dan Fungsi

Pada bab ini kita akan mereviu konsep himpunan dan fungsi. Keduanya merupakan bagian yang tak terpisahkan dari pembahasan hampir semua topik matematika. Disamping mengingat kembali berbagai definisi, operasi dan sifat-sifat, bagian ini ditujukan untuk mengenalkan berbagai notasi yang digunakan.

1.1 Himpunan

Jika x adalah suatu elemen di himpunan A maka kita menuliskan $x \in A$. Kadang-kadang kita juga mengatakan x suatu unsur atau anggota di A . Sementara itu jika y bukan elemen di A maka kita tuliskan $y \notin A$.

Untuk menuliskan sebuah himpunan kita dapat mencacah semua elemennya jika berhingga. Selain itu, cara yang lebih umum adalah kita memberi sifat khusus yang dimiliki oleh elemen-elemen di suatu himpunan. Adapun himpunan kosong kita menotasikannya dengan \emptyset . Sebagai contoh, himpunan berhingga $A = \{0, 1\}$ dapat juga dituliskan

$$A = \{x : x^2 = x\}.$$

Kita memahami notasi terakhir ini bahwa A adalah himpunan semua bilangan real x yang memenuhi sifat $x^2 = x$.

Beberapa himpunan mempunyai notasi khusus. Karena akan sering digunakan di buku ini maka kita akan mengingatkannya kembali notasi-notasi itu. Untuk him-

punan semua bilangan real kita menotasikan \mathbf{R} , sedangkan yang lainnya adalah

$$\text{Himpunan bilangan asli } \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{Himpunan bilangan bulat } \mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

$$\text{Himpunan bilangan rasional } \mathbf{Q} = \left\{ \frac{x}{y} : x, y \in \mathbf{Z}, y \neq 0 \right\}.$$

Selanjutnya, jika untuk sebarang $x \in A$ berlaku pula $x \in B$, maka kita katakan A subhimpunan dari B . Kita dapat menotasikannya dengan $A \subseteq B$ atau $B \supseteq A$. Sementara itu, dua buah himpunan A, B dikatakan sama, dinotasikan $A = B$, jika berlaku $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Sekarang kita melihat cara mendapatkan himpunan baru dari sebarang dua himpunan yang diberikan. Misalkan A dan B keduanya adalah himpunan. Komplemen B relatif terhadap A adalah himpunan semua elemen A yang tidak terdapat di B , dinotasikan $A \setminus B$. Dalam ungkapan lain

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Untuk menyatakan komplemen B relatif terhadap himpunan semesta \mathbf{R} , kita sering menotasikannya dengan B^c .

Untuk sebarang dua himpunan A, B , gabungan $A \cup B$, menyatakan semua elemen yang terdapat di A atau di B . Adapun irisan $A \cap B$ menyatakan semua elemen yang terdapat di A maupun di B . Dengan demikian kita dapat menuliskan

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ dan } x \in B\}.$$

Sebagai contoh, misalkan kita mempunyai dua himpunan

$$A = \{-1, 0, 2, 3, 5\} \quad B = \{0, 2, 4\}.$$

Maka kita peroleh

$$A \setminus B = \{-1, 3, 5\}$$

$$A \cup B = \{-1, 0, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cap B = \{0, 2\}$$

Berkaitan dengan operasi gabungan dan irisan himpunan, kita mempunyai sifat-sifat berikut.

Teorema 1.1.1 Misalkan A, B, C , adalah sebarang himpunan, maka

a. $A \cap A = A, \quad A \cup A = A$

b. $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$

c. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

d. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Misalkan A_1, A_2, \dots, A_n adalah n buah himpunan. Gabungan dan irisan dari n buah himpunan ini, masing-masing adalah

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x : x \in A_i \text{ untuk suatu } i\}$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x : x \in A_i \text{ untuk setiap } i\}.$$

1.2 Fungsi

Jika X dan Y masing-masing adalah himpunan tak kosong, kita mendefinisikan hasil kali kartesian $X \times Y$ sebagai himpunan

$$X \times Y = \{(a, b) : a \in X, b \in Y\}.$$

Sebagai contoh, misalkan $X = \{0, 1\}$ dan $Y = \{1, 2, 3\}$. Hasil kali kartesian dari X dan Y adalah

$$X \times Y = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}.$$

Definisi Misalkan f suatu subhimpunan di $X \times Y$. Subhimpunan f disebut *fungsi* jika untuk setiap $a \in X$ terdapat elemen tunggal $b \in Y$ yang memenuhi $(a, b) \in f$.

Selanjutnya, f pada definisi di atas kita sebut fungsi dari X ke Y , dinotasikan $f : X \rightarrow Y$. Untuk elemen $(a, b) \in f$, b kita sebut nilai f di a dan kita tuliskan $b = f(a)$. Dalam hal ini himpunan X kita sebut domain f , dinotasikan $X = D(f)$. Sementara himpunan semua $f(a) \in Y$ dengan $a \in X$ kita sebut peta dari X oleh f , dinotasikan $R(f)$.

Definisi Misalkan X, Y masing-masing adalah himpunan dan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi.

- a. f disebut fungsi satu-satu jika berlaku

$$x_1, x_2 \in X \text{ dan } f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

- b. f disebut fungsi onto jika untuk setiap $y \in Y$ terdapat $x \in X$ sehingga

$$f(x) = y.$$

Dalam ungkapan lain, $f : X \rightarrow Y$ adalah fungsi satu-satu jika untuk sebarang $x_1 \neq x_2$ berlaku $f(x_1) \neq f(x_2)$. Dan f dikatakan onto jika berlaku $R(f) = Y$. Selanjutnya, fungsi yang bersifat satu-satu dan onto kita sebut fungsi bijektif. Berkaitan dengan fungsi bijektif, kita mempunyai teorema penting berikut.

Teorema 1.2.1 *Jika $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi bijektif maka terdapat $g : Y \rightarrow X$ sehingga*

$$f(g(y)) = y, \quad y \in Y$$

dan

$$g(f(x)) = x, \quad x \in X.$$

Pada teorema di atas, g disebut invers dari f dan dinotasikan $g = f^{-1}$.

BAB 2

Sistem Bilangan Real (\mathbb{R})

Pada kuliah kalkulus Anda telah mempelajari beberapa sifat dasar bilangan real, khususnya sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian. Selain itu, Anda juga telah diperkenalkan dengan konsep urutan dengan berbagai sifatnya serta bentuk aplikasinya pada penyelesaian pertidaksamaan di bilangan real. Pada kuliah ini Anda akan mendapat wawasan lanjutan tentang materi yang telah Anda peroleh di kalkulus itu. Kita akan meninjau kembali sifat-sifat dasar di atas untuk kemudian melangkah pada sifat-sifat kelengkapan yang merupakan target utama bab ini.

2.1 Aksioma-aksioma Bilangan Real

Pada sistem bilangan real \mathbb{R} kita dapat mendefinisikan dua buah operasi, yaitu penjumlahan (+) dan perkalian (\cdot). Untuk semua $a, b, c \in \mathbb{R}$, kedua operasi ini memenuhi semua sifat berikut:

Sifat Ketertutupan $a + b$ dan $a \cdot b$ keduanya adalah elemen di \mathbb{R}

Sifat Komutatif $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$

Sifat Asosiatif $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Sifat Distributif $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Eksistensi Identitas Penjumlahan Terdapat $0 \in \mathbb{R}$ sehingga $0 + a = a$.

Eksistensi Identitas Perkalian Terdapat elemen $1 \in \mathbb{R}$ sehingga $1 \cdot a = a$ untuk semua $a \in \mathbb{R}$

Eksistensi Invers Penjumlahan Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ terdapat $-a \in \mathbb{R}$ sehingga

$$a + (-a) = 0.$$

Eksistensi Invers Perkalian Untuk setiap $x \neq 0$ di \mathbb{R} terdapat satu elemen $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ sehingga $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

2.2 Urutan

Disamping adanya dua operasi di atas, pada sistem bilangan real juga dikenal relasi urutan. Relasi urutan ini berkaitan dengan aspek positifitas dan ketaksamaan antara dua buah bilangan real. Sifat-sifat urutan ini akan banyak kita gunakan ketika mencari solusi pertidaksamaan di bilangan real. Persisnya, bahwa di \mathbb{R} terdapat subhimpunan tak kosong P , kita sebut himpunan bilangan positif, yang memenuhi tiga sifat berikut:

- i. Jika $a \in \mathbb{R}$ maka (hanya) satu diantara pernyataan berikut yang dipenuhi

$$a \in P, \quad a = 0, \quad \text{atau} \quad -a \in P$$

- ii. Jika $a, b \in P$ maka $a + b \in P$.

- iii. Jika $a, b \in P$ maka $ab \in P$.

Sifat yang pertama adalah yang dikenal dengan sebutan trikotomi. Adapun dua sifat berikutnya menyatakan bahwa subhimpunan P tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Sifat-sifat urutan

Sekarang kita akan melihat berbagai implikasi dari semua definisi di atas. Tidak hanya itu, kita mencoba membuktikannya dengan argumentasi logis.

Teorema 2.2.1 *Relasi urutan di \mathbb{R} memenuhi sifat-sifat berikut:*

- i. Untuk sebarang dua bilangan real a dan b maka persis satu di antara hubungan berikut dipenuhi

$$a < b, \quad a = b, \quad \text{atau} \quad a > b$$

- ii. Jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$ **[Sifat Transitif]**

iii. Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ maka $a = b$.

BUKTI. (i.) Untuk dua bilangan sebarang a dan b , kita peroleh $b - a \in \mathbb{R}$. Berdasarkan sifat trikotomi maka haruslah berlaku $b - a \in P \Leftrightarrow a < b$, atau $b - a = 0 \Leftrightarrow a = b$, atau $a - b \in P \Leftrightarrow a > b$.

(ii.) Misalkan $a < b$ dan $b < c$, berdasarkan definisi $b - a \in P$ dan $c - b \in P$. Karena P tertutup terhadap penjumlahan maka kita peroleh $(b - a) + (c - b) = c - a \in P$, atau $a < c$.

(iii.) Andaikan $a \neq b$, maka harus berlaku $a < b$ atau $a > b$, berdasarkan sifat trikotomi. Namun, baik $a < b$ ataupun $a > b$ keduanya bertentangan dengan asumsi awal, yaitu $a \leq b$ dan $b \leq a$. ■

2.3 Nilai Mutlak

Dalam pembahasan selanjutnya, kita berkepentingan dengan konsep jarak antara dua buah titik (bilangan) di garis real. Oleh karena itu kita tinjau kembali definisi nilai mutlak suatu bilangan, yang dapat kita pandang sebagai representasi jarak bilangan itu dari titik nol.

Definisi Nilai mutlak $|x|$ dari bilangan $x \in \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{jika } x \geq 0 \\ -x & , \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Dari definisi ini dengan mudah kita melihat bahwa $|a| \geq 0$ untuk semua a , dan jika $a = 0$ maka $|a| = 0$. Selanjutnya, misalkan $a \neq 0$, maka $-a \neq 0$ sehingga $|a| \neq 0$. Oleh karena itu kita peroleh $x = 0$ jika dan hanya jika $|x| = 0$.

Teorema berikut memberikan gambaran lebih lanjut mengenai sifat-sifat nilai mutlak.

BAB 3

Barisan di \mathbb{R}

Pada bab pertama kita telah mempelajari sifat-sifat dasar bilangan real. Pada bab ini kita akan mempelajari barisan bilangan real. Semua yang telah kita pahami mengenai sifat-sifat bilangan real akan menjadi modal untuk menguasai bab ini.

Bab ini memuat pembahasan barisan bilangan real serta kekonvergenannya. Dimulai dengan definisi barisan serta limitnya, baru kemudian masuk pada teorema-teorema terkait dengan kekonvergenan.

3.1 Limit Barisan

Anda tentu masih ingat, suatu barisan bilangan real adalah suatu fungsi di bilangan asli $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ dengan nilai fungsi di bilangan real. Jika kita mengaitkan $n \in \mathbb{N}$ dengan $x_n \in \mathbb{R}$ maka kita peroleh barisan (x_n) . Setiap x_n kita sebut suku atau elemen dari barisan tersebut.

3.2 Teorema Limit

Sekarang kita akan melihat berbagai teorema yang berkaitan dengan kekonvergenan barisan.

Teorema Misalkan (x_n) dan (y_n) keduanya adalah barisan konvergen dan $x_n \leq y_n$ untuk semua n . Maka berlaku $\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$.

Teorema Misalkan (x_n) barisan konvergen dan $a \leq x_n \leq b$ untuk semua n . Maka berlaku $a \leq \lim(x_n) \leq b$.

Teorema 3.2.1 (Prinsip Apit) Misalkan $(x_n), (y_n),$ dan (z_n) masing-masing adalah barisan bilangan real.

Jika $(x_n) \rightarrow x, (z_n) \rightarrow x$ dan terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga

$$(x_n) \leq (y_n) \leq (z_n) \quad n \geq N$$

maka $(y_n) \rightarrow x$

Perhatikan bunyi teorema di atas, pada suku-suku awal tidaklah mensyaratkan kondisi $(x_n) \leq (y_n) \leq (z_n)$, cukup pada bagian ekornya saja.

Salah satu akibat dari teorema di atas adalah hasil berikut.

3.3 Barisan Terbatas

Kita telah mengetahui definisi himpunan terbatas. Dengan esensi yang ekuivalen kita pun mendefinisikan barisan terbatas sebagai berikut.

Definisi Barisan (x_n) dikatakan *terbatas* jika terdapat bilangan $M \geq 0$ sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Jika tidak terdapat bilangan M yang demikian maka kita katakan (x_n) tidak terbatas.

Contoh

1. Barisan $X = \left(\frac{1}{n}\right)$ adalah terbatas karena $\left|\frac{1}{n}\right| \leq 1$
2. Barisan $Y = \left(\frac{n}{2}\right)$ adalah tidak terbatas, karena untuk setiap bilangan positif M terdapat bilangan asli n_M sehingga $M < \frac{n_M}{2}$.

Selanjutnya, hubungan antara kekonvergenan dan keterbatasan dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3.3.1 Setiap barisan yang konvergen adalah terbatas

BUKTI. Misalkan $x_n \rightarrow x$, maka terdapat N_1 sehingga untuk semua $n > N_1$ berlaku

$$|x_n - x| < 1.$$

Dengan memisalkan

$$C = \max\{|x_1|, \dots, |x_{N_1}|, |x| + 1\},$$

maka kita peroleh

$$|x_n - x| < 1 + C, \quad \text{untuk semua } n.$$

Ini menunjukkan bahwa (x_n) terbatas.

3.4 Teorema Bolzano-Weierstrass

Kita telah melihat bahwa setiap barisan yang konvergen adalah terbatas. Namun kebalikannya tidaklah berlaku. Cukup mudah untuk menemukan barisan terbatas tapi divergen. Meskipun demikian, jika suatu barisan terbatas maka kita dapat menemukan sub-barisan yang konvergen. Sifat inilah yang dikenal dengan Teorema Bolzano Weierstrass. Kita mulai dengan definisi berikut.

Definisi Misalkan (x_n) suatu barisan. Subbarisan dari (x_n) adalah barisan (x_{n_k}) , dimana $n_k \in \mathbb{N}$ dan $n_1 < n_2 < \dots$

Yaitu, bahwa suku-suku (x_{n_k}) berasal dari suku-suku (x_n) dan untuk sebarang dua suku berurutan $x_{n_k}, x_{n_{k+1}}$, indeks elemen x_{n_k} lebih rendah dari indeks $x_{n_{k+1}}$ di (x_n) .

Contoh Perhatikan barisan

$$(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right).$$

Kita definisikan barisan

$$(y_n) = \left(\frac{1}{2n}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right).$$

3.5 Barisan Cauchy

Definisi Barisan (x_n) dikatakan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat N_ε sehingga untuk semua $m, n > N_\varepsilon$ berlaku

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

Misalkan $(x_n) \rightarrow x$. Perhatikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat N_ε sehingga untuk semua $m, n > N_\varepsilon$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |(x_m - x) + (x - x_n)| \leq |x_m - x| + |x - x_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ini mengatakan bahwa setiap barisan yang konvergen adalah juga barisan Cauchy.

Lema Barisan Cauchy adalah terbatas.

BUKTI.

Daftar Pustaka

- [1] Bartle, R.G. (1985), *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons. Inc.
- [2] Wade, W.R. (2000), *An Introduction to Analysis*, Prentice Hall.