BAB I RUANG VEKTOR

Pada kuliah Aljabar Matriks kita telah mendiskusikan struktur ruang R^2 dan R^3 beserta semua konsep yang terkait. Pada bab ini kita akan membicarakan struktur yang merupakan bentuk perumuman dari R^n, yaitu yang kita sebut sebagai ruang vektor. Pada kuliah ini kita hanya membicarakan ruang vektor dengan skalar bilangan real.

Ruang Vektor

Definisi 1.1:

Misalkan V suatu himpunan tak kosong dan R menyatakan himpunan skalar real. V dikatakan ruang vektor atas R jika terdapat operasi biner penjumlahan (+) dan perkalian dengan skalar real sehingga untuk semua $x, y, z \in V$ *dan* $\alpha, \beta \in R$ *memenuhi:*

1. $x + y \in V,$ $(Ketertutupan\ terhadap\ penjumlahan)$
2. $x + y = y + x,$ $(Komutatif)$
3. $(x + y) + z = x + (y + z)$ $(Asosiatif)$
4. Terdapat $0 \in V$ sehingga $x + 0 = x$ $(Eksistensi\ unsur\ identitas\ di\ V)$
5. Terdapat $-x \in V$ sehingga $x + (-x) = 0$ $(Eksistensi\ unsur\ balikan\ di\ V)$
6. $\alpha x \in V,$ $(Ketertutupan\ terhadap\ perkalian\ skalar)$
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
9. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
10. $1x = x$

Mari kita lihat beberapa contoh ruang vektor berikut.

Contoh 1.2:

Misalkan $V = R^2$. Definisikan:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$k \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Dapat diperiksa bahwa terhadap operasi (1) dan (2), V merupakan ruang vektor. Dalam hal ini unsur nol di V adalah $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Secara umum terhadap operasi yang serupa, R^n membentuk ruang vektor.

Contoh 1.3:

Misalkan $P_2(x) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in R\}$, yaitu himpunan semua polinom dengan derajat paling tinggi 2. Definisikan,

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2+b_2)x^2$$

$$k(a_0 + a_1x + a_2x^2) = ka_0 + ka_1x + ka_2x^2$$

Terhadap kedua operasi ini, $P_2(x)$ juga membentuk ruang vektor. Elemen nol di $P_2(x)$ adalah polinom konstan 0.

Contoh 1.4: Himpunan semua matriks berukuran mxn, dinotasikan M_{mxn} merupakan ruang vektor terhadap operasi penjumlahan matriks biasa serta perkalian dengan skalar.

Selanjutnya kita akan mengidentifikasi subhimpunan di *V* yang mempunyai struktur yang sama dengan *V* sebagai ruang vektor.

Subruang Vektor

Definisi: (Subruang)

Misalkan V suatu ruang vektor dan W subhimpunan tak kosong dari V. W dikatakan subruang dari V jika W merupakan ruang vektor terhadap operasi yang sama.

Bagaimana kita dapat memastikan bahwa suatu himpunan itu suatu subruang? Jawaban dari masalah ini adalah kriteria berikut.

Teorema: (Subruang)

Misalkan W subhimpunan tak kosong dari ruang vektor V. W merupakan subruang dari V jika memenuhi kedua sifat berikut:

1. $x + y \in W,\ untuk\ semua\ x, y \in W$
2. $\alpha x \in W,\ untuk\ semua\ \alpha \in R, x \in W$

Contoh:

Misalkan $W = \{(x, 0) | x \in R\}$. Akan ditunjukkan bahwa *W* adalah subruang dari R^2.

Ambil $u = (u_1, 0), v = (v_1, 0) \in W,\ k \in R$. Perhatikan bahwa

$$u + v = (u_1, 0) + (v_1, 0) = (u_1 + v_1, 0) \in W$$

$$ku = (ku_1, 0) \in W$$

Dengan demikian *W* suatu subruang di R^2.

Contoh: $K = \{(x, 0) | x \geq 0\}$

K bukan subruang dari R^2 karena terdapat $x = (1,0) \in K,$ dan $-1 \in R$ sehingga $(-1)x = (-1,0) \notin K$.

Soal-Soal: Periksa apakah himpunan-himpunan berikut merupakan subruang.

1. $K = \{(x, y, z) | x = 2y,\ z = -y\}$

2. $K = \{(x, y, z) | x - 2y + 3z = 0\}$
3. $K = \{(x, y, z) | x = 2y - 1\}$
4. $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} : a + b + c = d \right\}$
5. $K = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \; | a_0 = a_1\}$
6. $\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0 = 0\}$
7. Buktikan bahwa himpunan solusi SPL homogen $Ax = 0$ membentuk subruang.
8. Periksa apakah himpunan semua matriks simetri di M_{2x2} merupakan subruang.
9. Misalkan $V = \{f : [0,1] \to R \mid f \text{ kontinu}\}$. Periksa bahwa V suatu subruang dari ruang fungsi.
10.

Kita melihat bahwa di ruang vector kita dapat menjumlahkan dua vector untuk mendapatkan vector baru. Sebagaimana kita juga dapat mengalikan dulu masing-masing dengan suatu scalar. Operasi-operasi ini dapat kita lakukan terhadap sebanyak hingga vector sehingga menghasilkan vector baru. Selanjutnya, kita mempunyai definisi berikut.

Himpunan Perentang (Spanning Set)

Definisi:

Misalkan V suatu ruang vektor dan $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. *Himpunan* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *dikatakan merentang V jika setiap vektor di V merupakan kombinasi linier dari* $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Dalam hal ini kita menuliskan $Span\,\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = V$.

Contoh: Periksa apakah himpunan $L = \{(1,2), (1,3)\}$ merentang R^2. Untuk itu kita ambil vektor sebarang (a,b) di R^2. Selanjutnya tuliskan persamaan

$$r(1,2) + s(1,3) = (a, b).$$

Dengan mudah kita dapatkan solusi persamaan ini adalah $s = b - 2a,\; r = 3a - b$. Ini artinya setiap vektor di R^2 merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor di L. Jadi himpunan L merentang R^2.

Kebebas-linearan

Misalkan subruang Kmempunyai perentang $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Satu masalah yang muncul adalah apakah kita dapat mereduksi himpunan ini dengan membuang sebagian vector tetapi sifat merentang masih dipertahankan. Untuk menjawab masalah ini kita mempunyai criteria berikut.

Definisi: (Bebas linier)

Misalkan V suatu ruang vektor dan $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$.

Himpunan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *dikatakan bebas linier jika persamaan*

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n = 0 \qquad (3)$$

hanya dapat dipenuhi oleh $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$

Basis dan Dimensi

Definisi: (Basis dan Dimensi)

Misalkan V suatu ruang vektor dan $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$*. Himpunan* $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *dikatakan sebagai basis bagi V jika B merentang V dan bebas linier. Dalam hal ini jika B merupakan basis bagi V maka dikatakan V berdimensi n* $(\dim(V) = n)$.

Contoh:

Dengan mudah kita dapat memeriksa bahwa $B = \{(1,0), (0,1)\}$ bebas linier serta merentang R^2. Jadi *B* merupakan suatu basis untuk R^2 dan $\dim(R^2) = 2$. *B* ini yang kita sebut basis baku bagi R^2.

Basis suatu ruang vektor tidaklah tunggal. Selain basis baku di atas dengan mudah kita dapat memeriksa bahwa $K = \{(1,1), (1,-1)\}$ juga basis untuk R^2. Secara umum jika α, β keduanya tidak nol maka $\{\alpha(1,1), \beta(1,-1)\}$ juga merupakan basis bagi R^2. Kita mempunyai sifat bahwa kardinalitas setiap basis dari suatu ruang vector adalah sama, sebagaimana dinyatakan dalam teorema berikut.

Koordinat dan Matriks Transisi

Misalkan V suatu ruang vektor dengan basis $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *dan* $v \in V$*. Koordinat vektor v terhadap basis B adalah*

$$[v]_B = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

dimana $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n = v$.

Contoh: Tentukan koordinat vektor $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ terhadap basis $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

Solusi: Koorinat v terhadap B adalah vektor $[v]_B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$ yang memenuhi

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dengan mudah kita melihat bahwa solusi persamaan ini adalah $k_3 = \frac{3}{2}, k_2 = \frac{3}{4}, k_1 = \frac{-9}{4}$, sehingga kita peroleh

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \frac{-9}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Perhatikan, bahwa urutan vektor di basis sangat menentukan koordinat. Jika

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

maka koordinat v terhadap B' adalah

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{-9}{4} \end{bmatrix}$$

Teorema:

Koordinat vektor terhadap suatu basis tertentu adalah tunggal.

Contoh: Tentukan koordinat $p(x) = x$ terhadap basis $\{-1,\ \ 2 - x,\ \ -1 + x + x^2\}$

Kita melihat bahwa koordinat vector terhadap suatu basis adalah sesuatu yang unik yang dapat kita anggap sebagai identitas penting dari vector tersebut. Jadi kita dapat mengidentifikasi suatu vector melalui koordinatnya. Lebih jauh lagi, kita mempunyai teorema yang menguatkan hal ini.

Teorema:

Misalkan V ruang vektor dengan basis $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Maka terdapat korespondensi satu-satu antara V dengan R^n.

Teorema ini merupakan akibat langsung dari ketunggalan koordinat suatu vektor.

Matriks Transisi

Sekarang pandang dua basis berbeda $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $B' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ untuk ruang vektor V. Matriks transisi dari B ke B' adalah

$$P = [\ [v_1]_{B'} \quad \cdots \quad [v_n]_{B'}\ ]$$

dan memenuhi hubungan

$$[v]_{B'} = P[v]_B$$

Matriks P di atas adalah suatu matriks non-singulir. Lebih lanjut P^{-1}merupakan matriks transisi dari B' ke B.

Contoh: Pandang dua basis $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ dan $B' = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ untuk ruang vektor R^3. Dapat diperiksa bahwa matriks transisi dari B ke B' adalah

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Kita dapat menggunakan matriks P ini untuk mencari koordinat suatu vector terhadap B'. Karena koordinat vector $v = (1,2,3)$ terhadap B adalah $[v]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ maka koordinat v terhadap B' adalah

$$[v]_{B'} = P[v]_B = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Sebagai pengujian kita periksa bahwa $-1(1,0,0) - 1(1,1,0) + 3(1,1,1) = (1,2,3)$.

Soal: Tentukan matriks transisi dari $B = \{-1,\ 2 - x,\ -1 + x + x^2\}$ ke $B' = \{3 + x - x^2,\ 2 - x, -2\}$

Ruang Baris dan Ruang Kolom

Setiap ruang vektor V senantiasa mempunyai basis, yaitu subhimpunan yang merentang V serta bebas linier. Selanjutnya, jika kita mempunyai subhimpun B yang merentang subruang W, bagaimana kita dapat mereduksi B menjadi basis untuk W. Konsepnya sederhana, yaitu dengan cara membuang sebagian vektor sehingga vektor-vektor yang tersisa bebas linier. Salah satu tujuan pembahasan bab ini adalah menjawab permasalahan tadi. Kita memulai dengan definisi berikut.

Definisi:

Misalkan V suatu ruang vektor dan $B = \{v_1, v_2, \dots, v_s\} \subseteq V$. Himpunan yang dibangun oleh B adalah

$$Span(B) = \{\textstyle\sum_1^s k_i v_i \mid k_i \in R\}.$$

Telah dibuktikan bahwa $Span(B)$ merupakan subruang dari V. Oleh karena itu $Span(B)$ mempunyai basis dan dimensi. Terkait dengan hal ini kita mempunyai teorema berikut.

BAB 2 RUANG HASIL KALI DALAM

Pada bab sebelumnya kita telah melihat ruang vektor R^2 dan R^3 yang dilengkapi dengan perkalin titik. Dengan mengacu pada perkalin titik ini kita juga telah melihat definisi panjang vektor, sudut serta ortogonalitas antara dua vektor dan juga proyeksi satu vektor pada vektor lain. Pada bab ini kita akan melihat bentuk perumuman dari perkalian titik, sudut, ortogonalitas dan juga proyeksi.

Hasil Kali Dalam

Definisi:

Misalkan V suatu ruang vektor atas R. Suatu fungsi $\langle .,. \rangle : V \times V \to R$ disebut hasil kali dalam di V jika memenuhi sifat-sifat:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ dan $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. $k\langle x, y \rangle = \langle kx, y \rangle$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Pasangan $(V, \langle .,. \rangle)$ kita sebut ruang hasil kali dalam.

BAB 3 TRANSFORMASI LINIER

Kita telah melihat struktur ruang vektor dengan segala sifat-sifat yang dimilikinya. Pada bab ini kita akan mendiskusikan suatu fungsi di suatu ruang vektor. Persisnya, fungsi yang akan kita kaji adalah apa disebut sebagai transformasi linier.

Definisi 3.1: (Transformasi Linier)

Misalkan V dan W masing-masing adalah ruang vektor berdimensi hingga. Suatu fungsi $f: V \to W$ disebut transformasi linier jika memenuhi sifat-sifat:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y),$ untuk semua $x, y \in V$
2. $\alpha f(x) = f(\alpha x),$ untuk semua $x \in V$ dan $\alpha \in R$

Matriks Representasi (Transformasi)

Misalkan V , W masing-masing adalah ruang vektor dengan basis masing-masing adalah

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\},\ B' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ dan $f: V \to W$ suatu transformasi linier. Matriks transformasi f adalah

$$[f]_{BB'} = [[f(v_1)]_{B'} \quad \cdots \quad [f(v_n)]_{B'}]$$

yaitu suatu matriks berukuran *mxn* dengan kolom ke-i berupa koordinat $f(v_i)$ terhadap B'. Lebih lanjut matriks ini memenuhi hubungan

$$[f(v)]_{B'} = [f]_{BB'}\,[v]_B$$

Jika $f: V \to V$ suatu transformasi linier dan V ruang vektor berdimensi hingga dengan basis B maka matriks representasi f sering dinotasikan dengan $[f]_B$. Jika B' basis lain untuk V maka kita mempunyai hubungan

$$[f]_{B'} = P^{-1}[f]_B P$$

Dengan B menyatakan matriks transisi dari B' ke B.

Contoh:

Sebagaimana kita ketahui basis ruang vektor itu tidak tunggal. Di sini muncul pertanyaan bagaimana kaitan antara matriks representasi dari basis-basis yang berbeda.

Keserupaan

Definisi: (Keserupaan)

Misalkan *A* dan *B* masing-masing adalah matriks kuadrat. Jika terdapat matriks non-singulir P yang memenuhi

$$B = P^{-1}A\ P$$

Maka dikatakan *A* serupa dengan *B*.

Berdasarkan definisi ini dua buah matriks transformasi $[f]_B$ dan $[f]_{B'}$ adalah serupa.

BAB 4 DIAGONALISASI

Nilai dan Vektor Eigen

Definisi 4.1: (Nilai dan vektor eigen)

Misalkan M suatu matriks berukuran nxn.

Vektor tak nol $x \in R^n$ *disebut vektor eigen dari M jika memenuhi*

$$Mx = kx,\ \ untuk\, suatu\, k \in R$$

Dalam hal ini, k disebut nilai eigen yang bersesuaian dengan x.

Diagonalisasi Ortogonal

Definisi 4.11:

Suatu matriks M dikatakan matriks orthogonal jika memenuhi hubungan $M^{-1} = M^t$.

Contoh 4.12: Perhatikan matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dapat diperiksa bahwa $AA^t = A^tA = I$. Jadi A suatu matriks orthogonal.

Berikut ini kriteria utama dari matriks orthogonal.

Teorema 4.13: *Jika A suatu matriks real nxn maka pernyataan berikut ekuivalen:*

1. *A suatu matriks orthogonal*
2. *Vektor-vektor baris matriks A membentuk himpunan ortonormal terhadap perkalian titik*
3. *Vektor-vektor kolom matriks A membentuk himpunan ortonormal terhadap perkalian titik*

Sekarang kita melangkah pada inti bagian ini.

Definisi 4.14:

Suatu matriks M dapat didiagonalkan secara orthogonal jika M mempunyai matriks pendiagonal P yang bersifat orthogonal.

Selanjutnya, misalkan *M* dapat didiagonalkan secara orthogonal dengan matriks pendiagonal *P* yang orthogonal. Dengan demikian kita mempunyai hubungan

$$P^{-1}MP = D \Leftrightarrow M = PDP^{-1} \Leftrightarrow M^t = PDP^{-1},$$

karena *P* bersifat orthogonal. Dengan demikian *M* suatu matriks simetri. Hasil ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 4.15: *Jika M adalah matriks berukuran nxn, maka pernyataan berikut ekuivalen:*

1. *M dapat didiagonalkan secara orthogonal*
2. *M mempunyai himpunan ortonormal dari n vektor eigen*
3. *M simetri*

Bagaimana kita dapat memperoleh matriks orthogonal *P* yang mendiagonalkan *M*? Seperti biasa kita mencari himpunan *n* buah vektor eigen yang bebas linier. Kemudian dengan menggunakan proses

Gram-Schmidt kita mengubahnya menjadi himpunan (basis) ortonormal. Kolom-kolom matriks *P* berasal dari vektor-vektor basis ortonormal ini.

Soal:

Carilah matriks orthogonal P yang mendiagonalkan matriks-matriks berikut:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 3. $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi Kelima. Penerbit Erlangga, Jakarta.
[2] Jacob, Bill. *Linear Algebra*. W.H. Freeman and Company. New York. 1990.