ALJABAR LINEAR

SUMANANG MUHTAR GOZALI

KBK ANALISIS

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

BANDUNG

2010

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Segala puji bagi Allah Rabb semesta alam. Shalawat serta salam bagi Rasulullah Muhammad *shallallahu alaihi wasallam*. Tulisan ini merupakan hasil rangkuman materi kuliah Aljabar Linear yang pernah diampu oleh Penulis. Uraian dibuat sesederhana mungkin yang diharapkan dapat dipahami dengan mudah oleh pengguna tulisan ini. Terakhir, Penulis berharap semoga tulisan ini bermanfaat, khususnya bagi para pembaca yang berminat dalam bidang aljabar.

Bandung, Maret 2010

Penulis,

Sumanang Muhtar Gozali

DAFTAR ISI

BAB 1

Sistem Persamaan Linear dan Matriks

Pada bab pertama ini kita akan mempelajari sistem persamaan linear (SPL). Pembahasan ditujukan untuk memahami metode dalam mencari solusi sistem persamaan linear. Pemahaman yang mendalam akan metode ini akan sangat membantu memahami bab-bab berikutnya. Selain itu kita juga akan mempelajari dasar-dasar operasi pada matriks. Pembahasan meliputi operasi penjumlahan, perkalian, transpose dan metode mencari invers matriks.

1.1 Sistem Persamaan Linear

Persamaan linear adalah suatu persamaan dimana variabel yang terlibat berderajat paling tinggi satu. Jika kita mempunyai beberapa persamaan linear maka sekumpulan persamaan linear itu disebut *sistem persamaan linear*. Suatu pasangan beberapa bilangan disebut *solusi* dari suatu SPL jika pasangan tersebut memenuhi kebenaran masing-masing persamaan dari SPL tersebut.

Sebagai contoh, perhatikan SPL dengan dua persamaan dan dua variabel berikut

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_2 &= -4 \end{aligned}.$$

Dari persamaan kedua kita mendapatkan $x_2 = -2$, sehingga dengan menyulihkannya pada persamaan pertama kita peroleh $x_1 = 3$. Dengan demikian SPL di atas mempunyai solusi $x_1 = 3,\ x_2 = -2$, dan tidak ada solusi lain. Jadi solusi SPL di atas adalah tunggal.

Sekarang, perhatikan SPL berikutnya

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 9 \end{aligned}.$$

Perhatikan bahwa jika kita mengalikan persamaan kedua dengan 1/3 maka diperoleh persamaan pertama. Dengan kata lain, SPL ini ekuivalen dengan satu persamaan

$$x_1 - 2x_2 = 3.$$

Kita mempunyai banyak pilihan dari pasangan x_1 dan x_2 yang memenuhi persamaan ini. Jika kita mengambil $t \in \mathbf{R}$ sebarang maka $x_1 = 3+2t,\ x_2 = t$ merupakan solusi persamaan ini. Dengan demikian SPL semula mempunyai solusi tak hingga banyak.

Selanjutnya, perhatikan SPL

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 4x_1 + 8x_2 &= 6 \end{aligned}.$$

Jika kita mengalikan persamaan kedua dengan 1/4 maka kita peroleh persamaan

$$x_1 + 2x_2 = 3/2.$$

Jadi SPL semula ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 &= 3/2 \end{aligned}.$$

Jelas bahwa tidak ada pasangan x_1 dan x_2 yang memenuhi persamaan ini. Oleh karena itu SPL ini tidak mempunyai solusi.

Tiga kemungkinan di atas juga berlaku pada sebarang SPL dengan m buah persamaan dan n variabel. Sifat ini kita nyatakan dalam teorema berikut.

Teorema. *Jika kita mempunyai sebuah SPL maka persis hanya satu dari tiga kemungkinan berikut dipenuhi:*

a. SPL mempunyai solusi tunggal

b. SPL mempunyai solusi tak hingga banyak

c. SPL tidak mempunyai solusi.

Pada tiga contoh di atas kita tidak menemui kesulitan untuk menguji eksistensi solusi karena banyaknya persamaan dan variabel hanya dua. Jika persamaan atau variabelnya lebih banyak tentu masalahnya sedikit lebih sulit. Kita akan mempelajari metode praktis untuk menguji eksistensi solusi SPL secara umum.

Sistem persamaan linear yang terdiri dari m buah persamaan linear dengan n buah variabel $x_1, ..., x_n$ mempunyai bentuk umum

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = &\quad b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = &\quad b_2 \\ \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = &\quad b_m \end{aligned}$$

Sistem ini dapat kita nyatakan dalam bentuk persamaan matriks

$$AX = B$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Dalam hal ini, A disebut matriks koefisien, X adalah matriks variabel, dan B matriks konstan. Mulai sekarang kita akan mengidentifikasi SPL melalui persamaan matriks $AX = B$ seperti di atas. Selain itu, kita juga akan mengenali sifat-sifat SPL melalui pengetahuan kita perihal matriks-matriks ini.

Oleh karena itu, perhatikan kembali SPL berikut

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = &\quad b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = &\quad b_2 \\ \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = &\quad b_m \end{aligned}.$$

Jika kita menukar posisi dua buah persamaan atau mengalikan salah satu persamaan dari SPL di atas dengan sebarang bilangan tak nol maka hal itu tidak akan mempengaruhi solusi. Demikian pula jika kita menambahkan kelipatan suatu persamaan kepada persamaan lain maka tidaklah mengubah solusi SPL semula. Semua sifat ini akan kita gunakan dalam menyederhanakan SPL sehingga solusinya mudah diperoleh.

Untuk kepraktisan kita akan bekerja dengan *matriks lengkap* dari SPL bersangkutan, yaitu matriks hasil penggabungan matriks koefisien dan matriks konstanta. Kita akan menotasikan matriks lengkap ini dengan $[A|B]$. Sebagai contoh, perhatikan SPL

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 \quad\quad &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} .$$

SPL ini mempunyai matriks lengkap

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Operasi Baris Elementer (OBE)

Perhatikan matriks berukuran $m \times n$ berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} .$$

Kita menyebut masing-masing $(a_{i1} \ ... \ a_{in})$ sebagai baris-baris dari matriks A. Pada matriks A kita dapat melakukan operasi-operasi berikut:

a. **mengalikan suatu baris dengan bilangan tak nol**

b. **menambahkan kelipatan suatu baris pada baris lain**

c. **menukarkan sebarang dua buah baris**

Ketiga operasi di atas disebut *operasi baris elementer*. Suatu matriks $\tilde{A}$ yang diperoleh dari proses sejumlah hingga OBE pada matriks A, dikatakan *ekuivalen* (baris) dengan matriks A. Dalam hal ini kita akan menggunakan notasi $A \sim \tilde{A}$.

Contoh Pandang matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jika kita mengalikan baris pertama dengan -2, kemudian kita tambahkan pada persamaan kedua maka baris kedua berubah menjadi $(0\ 1\ \ -1)$. Demikian pula jika kita mengalikan baris pertama dengan 3, kemudian ditambahkan pada baris ketiga diperoleh baris ketiga yang baru, yaitu $(0\ 2\ \ -3)$. Jadi kita mendapatkan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Berkaitan dengan ekivalensi baris dua buah matriks kita mempunyai lema berikut.

Lema. *Perhatikan SPL yang dinyatakan dalam matriks lengkap* $[A|B]$. *Jika* $[A'|B']$ *ekuivalen baris dengan* $[A|B]$ *maka SPL* $AX = B$ *ekuivalen dengan* $A'X = B'$.

Lema di atas mengatakan bahwa kedua SPL $AX = B$ dan $A'X = B'$ mempunyai solusi yang sama, atau keduanya sama-sama tidak mempunyai solusi. Kita akan menggunakan lema ini untuk mencari solusi suatu SPL. Secara umum, langkah yang dilakukan adalah melakukan OBE pada matriks lengkap sehingga berubah menjadi matriks segitiga atas.

Contoh. Tentukan solusi SPL

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 \qquad &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} .$$

Jawab: SPL di atas mempunyai matriks lengkap

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tambahkan baris pertama pada baris kedua. Kemudian kalikan baris pertama dengan (-2) dan ditambahkan pada baris ketiga maka kita peroleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, kalikan baris kedua dengan 5, kemudian tambahkan pada baris ketiga. Baris ketiga sekarang berubah menjadi (0 0 4 11). Kemudian jika kita mengalikan baris kedua dengan (-1) maka menjadi ($0\ 1\ -1\ -3$). Oleh karena itu, sekarang kita mempunyai

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \end{bmatrix}.$$

Matriks terakhir ini bersesuaian dengan SPL

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= -3 \\ 4x_3 &= 11 \end{aligned}.$$

Dari persamaan ketiga kita peroleh $x_3 = 11/4$. Dengan menyulihkan $x_3 = 11/4$ pada persamaan kedua kita dapatkan

$$x_2 = -3 + x_3 = -3 + 11/4 = -1/4.$$

Terakhir, dengan menyulihkan keduanya pada persamaan pertama kita peroleh

$$x_1 = 2 + 2x_2 - x_3 = 2 + (-2)/4 - 11/4 = -5/4.$$

Jadi SPL semula mempunyai solusi tunggal

$$x = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Contoh. Tentukan solusi dari

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 2 \end{aligned}.$$

Jawab: SPL di atas mempunyai matriks lengkap

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dengan melakukan OBE kita peroleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa matriks terakhir bersesuaian dengan SPL

$$\begin{array}{rl} x_1 - x_2 + 2x_3 & = 1 \\ 2x_2 - 4x_3 & = 1 \\ 0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 & = -1 \end{array}.$$

Perhatikan bahwa tidaklah mungkin ada x_1, x_2, x_3 yang memenuhi persamaan ketiga. Oleh karena itu kita menyimpulkan bahwa SPL semula tidak mempunyai solusi.

Matriks Eselon Baris

Berdasarkan contoh-contoh di atas kita mengetahui bahwa jika matriks lengkap SPL itu berbentuk segitiga atas maka proses mendapatkan solusi menjadi lebih mudah. Demi kepentingan pada pembahasan berikutnya kita akan mendefinisikan satu pola matriks yang disebut matriks *eselon baris*. Suatu matriks A dikatakan berbentuk eselon baris jika memenuhi tiga sifat berikut:

a. **Jika memuat baris tak nol maka entri tak nol paling kiri adalah 1, selanjutnya kita sebut sebagai 1 utama**

b. **Untuk sebarang dua baris tak nol yang berurutan, 1 utama baris lebih bawah terletak lebih kanan**

c. **Jika memuat baris-baris nol maka semuanya terletak di bagian bawah matriks**

Selanjutnya, jika A adalah matriks eselon baris dan setiap kolom yang mempunyai 1 utama mempunyai entri 0 di tempat lain maka A disebut *eselon baris tereduksi.*

Contoh. Perhatikan tiga matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks A eselon baris, matriks C eselon baris tereduksi, sementara matriks B bukan eselon baris.

Definisi. Misalkan kita mempunyai SPL $AX = B$ dengan matriks lengkap bentuk eselon baris $[A'|B']$. Variabel yang bersesuaian dengan kolom yang mempunyai 1 utama disebut *variabel utama.* Yang lainnya kita sebut *variabel non utama.*

Contoh. Perhatikan SPL

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \quad &= 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \quad &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 \quad &= 2 \end{aligned} .$$

SPL ini mempunyai matriks lengkap

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dengan melakukan OBE kita peroleh

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \end{aligned}.$$

Jelas bahwa hanya tiga kolom pertama yang mempunyai 1 utama sehingga $x_1,\ x_2,\ x_3$ merupakan variabel-variabel utama. Adapun x_4 dan x_5 adalah variabel-variabel non utama.

Setelah kita mengenal matriks eselon baris, sekarang kita dapat menetapkan salah satu prosedur mendapatkan solusi SPL, yaitu melalui tahap-tahap berikut:

1. **Mengenali matriks lengkap** $[A|B]$
2. **Mengubah** $[A|B]$ **ke bentuk eselon baris** $[A'|B']$
3. **Jika setiap kolom matriks** A' **mempunyai 1 utama maka solusi bersifat tunggal**
4. **Variabel non utama dari matriks** A' **memunculkan parameter**

Contoh. Tentukan solusi dari

$$\begin{array}{rl} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \qquad & = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 & = 0 \end{array}.$$

Solusi: Kita lakukan OBE pada matriks lengkap untuk memperoleh bentuk eselon baris

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Misalkan $x_2 = r,\ x_4 = s,\ x_5 = t.$ Kita peroleh $x_3 = 2 - s - t$ dan $x_1 = 3 - r - 2s - t.$ Dengan demikian solusi SPL ini dapat kita tuliskan $x_1 = 3 - r - 2s - t,\ x_2 = r,\ x_3 = 2 - s - t,\ x_4 = s,\ x_5 = t.$

Kriteria rank untuk eksistensi solusi

1.2 Sistem Persamaan Linear Homogen

1.3 Operasi Pada Matriks

BAB 2

Ruang Vektor

Suatu ruang vektor X atas $\mathbb{K}$ adalah suatu himpunan X yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan

$$u + v,\ \ u, v \in X$$

dan perkalian dengan skalar

$$\alpha u,\ \ \alpha \in \mathbb{K},\ \ u \in X$$

sehingga semua aksioma berikut terpenuhi:

V1. $u + v = v + u$

V2. $(u + v) + w = u + (v + w)$

V3. terdapat $0 \in X$ sehingga $0 + u = u$.

V4. Untuk setiap $x \in X$ terdapat $-x \in X$ sehingga $x + (-x) = 0$.

V5. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

V6. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

V7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

V8. $1x = x$

Contoh 2.0.1 *Misalkan* $X = \mathbb{R}^n$ *dimana* $n = 1, 2, 3, ...;$ *yaitu himpunan*

$$X = \{x = (x_1, ..., x_n) \ : x_i \in \mathbb{R}\}$$

Definisikan

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, ..., x_n) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$$

Contoh 2.0.2 *Perhatikan himpunan polinom dengan derajat paling tinggi 2,*

$$P_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Definisikan

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

$$\alpha(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2$$

Contoh 2.0.3 *Misalkan* $X = M_{m\times n}(\mathbb{R})$*; yaitu himpunan* X *yang memuat semua matriks berukuran* $m \times n$*.*
Definisikan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ \vdots & ... & \vdots \\ b_{m1} & ... & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & ... & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & ... & \alpha a_{1n} \\ \vdots & ... & \vdots \\ \alpha a_{m1} & ... & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.1 Subruang

Let X be a vector space over $\mathbb{R}$, and $Y \subseteq X$, $(Y \neq \emptyset)$.
Y is a subspace of X if Y is itself a vector space over $\mathbb{R}$ with respect to the operations of vector addition and scalar multiplication X.

Contoh 2.1.1 *Let* $X = \mathbb{R}^2$*.*

Consider the following subsets of X*:*

1. $Y_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

2. $Y_2 = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Teorema 2.1.1 *Let X be a vector space over $\mathbb{R}$, $Y \subseteq X$, $(Y \neq \emptyset)$.*
Y is a subspace of X if Y satisfies two following conditions:

1. $x + y \in Y,\ \forall x, y \in Y$

2. $\alpha x \in Y,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x \in Y$

Let X be a vector space over $\mathbb{R}$, and $S = \{x_1, ..., x_n\}$ are set of vectors in X. x is called linear combination of $S = \{x_1, ..., x_n\}$ if there exists scalars $\alpha_1, ..., \alpha_n$ such that

$$x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$$

(4,5) is linear combination of (2,1) and (3,3), because we can write

$$-1(2, 1) + 2(3, 3) = (4, 5)$$

Definisi 2.1.1 *Let X be a vector space over $\mathbb{R}$, and $S \subseteq X$.*
X is spanned by S if every vector y in X is linear combination of S.

Consider $S = \{(1, 1), (1, 2)\} \subset X = \mathbb{R}^2$.
If we take $(a, b) \in X$ arbitrarily, we can find scalars α, β such that

$$\alpha(1, 1) + \beta(1, 2) = (a, b).$$

Consider the set $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset X = \mathbb{R}^3$. For every $(a, b, c) \in X$, we can write

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1).$$

So we conclude that S spans X.

Definisi 2.1.2 *Let $S = \{x_1, ..., x_n\}$ are set of vectors in X. S is linearly independent if*

$$0 = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$$

has unique solution.

2.2 Basis

Definisi 2.2.1 *Let* $S = \{x_1, ..., x_n\}$ *are set of vectors in* X*.*

S *is called basis of* X *if* S *linearly independent and Spans* X*.*

The number n *of all vectors in the basis is called dimension of* X*. (dim(X)=n).*

2.3 Ruang Baris dan Ruang Kolom

BAB 3

Determinan

BAB 4

Ruang Hasil Kali Dalam

4.1 Hasil Kali Dalam

Definisi 4.1.1 *Let X be a vector space over $\mathbb{R}$. An inner product $\langle .,. \rangle$ is a function on $X \times X$ which satisfies:*

1 $\langle x, x \rangle \geq 0$; *and* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

3 $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

4 $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

The pair $(\langle .,. \rangle, X)$ is called inner product space.

Let $(\langle .,. \rangle, X)$ be an inner product space, and $x \in X$.
Norm (length) of x is the number

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Let x, y are nonzero vectors in X. The angle between x and y is θ for which

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|.\|y\|}$$

Teorema 4.1.1 *Untuk sebarang $x, y \in X$*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

4.2 Basis Ortonormal

Let $S = \{x_1, ..., x_n\}$ are set of vectors in X.

S is an *orthogonal set* if $x_i \neq x_j$ when $i \neq j$.

Let $S = \{x_1, ..., x_n\}$ are set of vectors in X.

S is an *orthonormal set* if S is orthogonal and $\|x_i\| = 1, \forall i$

Suppose $S = \{x_1, ..., x_r\}$ is orthonormal basis for subspace W of X, and $x \in X$.

The projection of x along W is

$$Proj_W x = \langle x, x_1 \rangle x_1 + ... + \langle x, x_r \rangle x_r$$

Definisi 4.2.1

Teorema 4.2.1

BAB 5

Transformasi Linear

Definisi 5.0.2 *Let V, W are vector spaces over $\mathbb{R}$.*
The transformation

$$f : V \to W$$

is said to be linear if for all $x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}$, the following axioms hold:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$

2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

5.1 Kernel dan Peta

Let $f : V \to W$ be a linear transformation.
We define Kernel and Range of f as sets

$$Ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

and

$$R(f) = \{w \in W \mid w = f(u),\ u \in V\}$$

Teorema 5.1.1 *Let $f : V \to W$ be a linear*

1. *$Ker(f)$ is a subspace of V.*

2. *$R(f)$ is a subspace of W*

5.2 Matriks Transformasi

Let V, W be finite dimensional vector spaces with basis $B = \{v_1, ..., v_n\}$ for V, and $B' = \{w_1, ..., w_n\}$ for W. If $f : V \to W$ is linear, representation matrix of f is defined by

$$[f]_{BB'} = \left[\begin{array}{ccc} [f(v_1)]_{B'} & ... & [f(v_n)]_{B'} \end{array} \right]$$

BAB 6

Nilai Eigen dan Diagonalisasi

6.1 Nilai dan Vektor Eigen

Definisi 6.1.1 *Let M be a $n \times n$ matrix over $\mathbb{R}$. $\lambda \in \mathbb{R}$ is called an eigenvalue of M if there exists a nonzero vector $x \in \mathbb{R}^n$ for which*

$$Mx = \lambda x$$

Every vector satisfying this relation is then called an eigenvector of M belonging to the eigenvalue λ.

Let λ be an eigenvalue of M, and x is the correspondence eigenvector. Consider the relation

$$Mx = \lambda x.$$

This equation is equivalent to

$$(\lambda I - M)x = 0.$$

Then x is a solution of the system $(\lambda I - M)x = 0$.
Therefore, we have

$$|(\lambda I - M)| = 0.$$

Teorema 6.1.1 *The following are equivalent:*

1. *λ is an eigenvalue of M*

2. *x is a solution of the system $(\lambda I - M)x = 0$.*

3. $|(\lambda I - M)| = 0$

6.2 Diagonalisasi

Definisi 6.2.1 *A $n \times n$ matrix M is said to be diagonalizable if there exists a non-singular matrix P for which*

$$D = P^{-1}MP$$

where D is a diagonal matrix.

Teorema 6.2.1 *Let M be a $n \times n$ matrix over $\mathbb{R}$. If M has linearly independent set of n eigenvectors then M is diagonalizable. Moreover,*

Teorema 6.2.2 *Let M be a $n \times n$ matrix over $\mathbb{R}$. If M has n distinct eigenvalues then M is diagonalizable.*

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, Howard (1985), *Aljabar Linear Elementer*, Erlangga.

[2] Jacob, Bill. (1978), *Linear Algebra*, W.H. FREEMAN & COMPANY.

[3] Arifin, Achmad (2000), *Aljabar Linier*, Penerbit ITB.

[4] Friedberg, Stephen H., Insel Arnold J., Spence, Lawrence E. . (1997), *Linear Algebra*, Prentice Hall.