INTEGRAL

Oleh

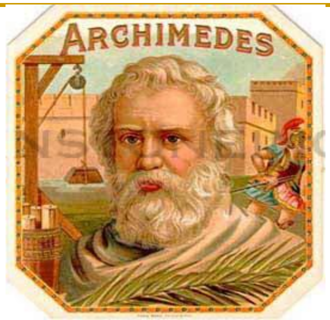
Siti Fatimah, M.Si., Ph.D

Go to Siti's file

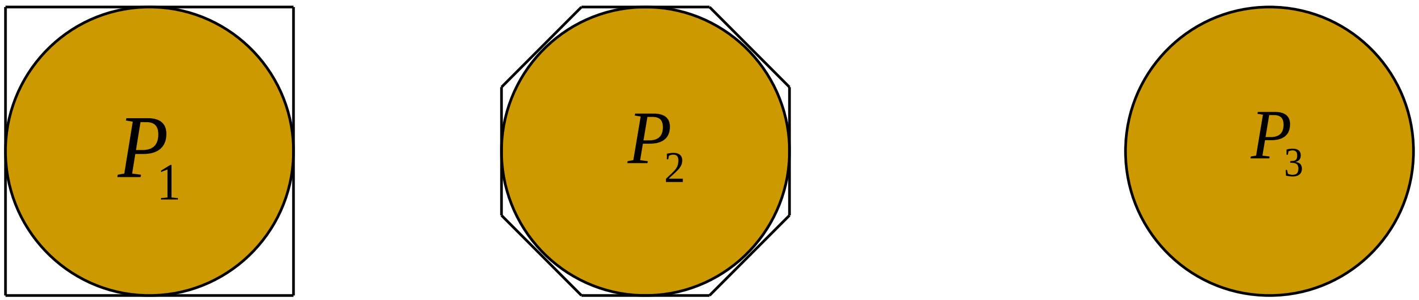
Deskripsi

- Motivasi
- Jumlah Riemann-Integral Tentu
- Teorema Dasar Kalkulus
- Sifat-sifat Integral Tentu
- Anti Derivatif-Integral Tak tentu
- Teknik Pengintegralan

Motivasi



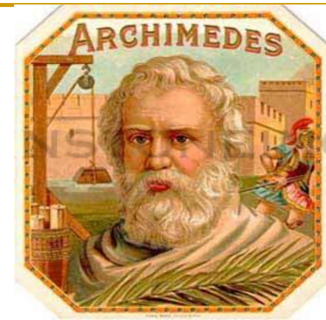
Luas Bidang Lengkung



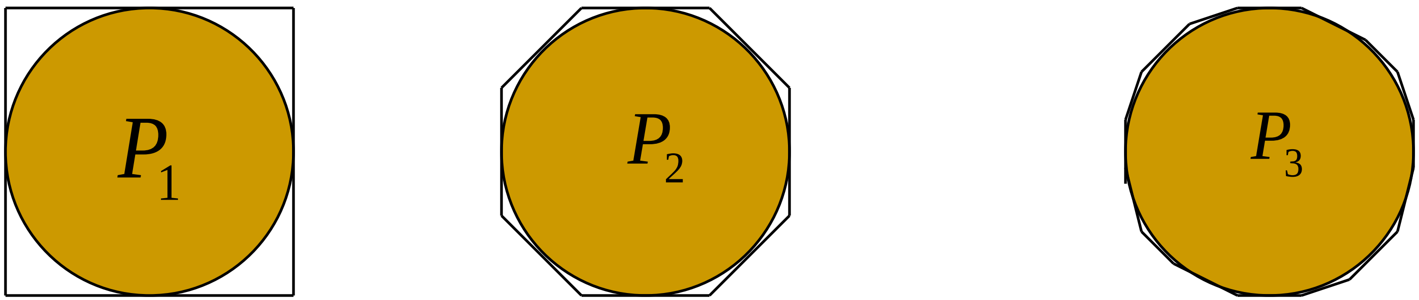
Empat sisi

Delapan sisi

Motivasi



Luas Bidang Lengkung



...

Empat sisi   Delapan sisi   Enambelas sisi   ...

$$P_1, P_2, P_3, \ldots$$

Untuk $n \to \infty$ $\mathrm{A(Lingkara\ n)} \to A(P_n)$ **atau**

$$\mathrm{A(Lingkaran)} = \lim_{n\to\infty} A(P_n)$$

Deskripsi

Jumlah Rieman-Integral Tentu

George Friedrich Bernhard Riemann
(1826-1866)

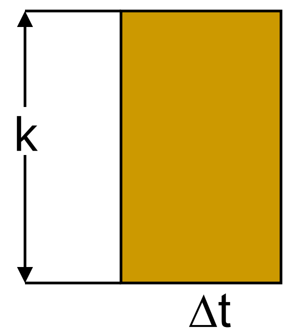
Deskripsi

Masalah 1: (Purcell)

Sebuah partikel bergerak sepanjang kurva-y sedemikian sehingga kecepatannya pada saat $t \geq 0$ diberikan oleh $v(t) = \frac{1}{4}t^3 + 1$ meter perdetik. Seberapa jauh partikel tersebut bergerak antara $t = 0$ dan $t = 3$?

Pembahasan

Fakta:



Benda bergerak dengan Kecepatan tetap k selama selang waktu Δt.

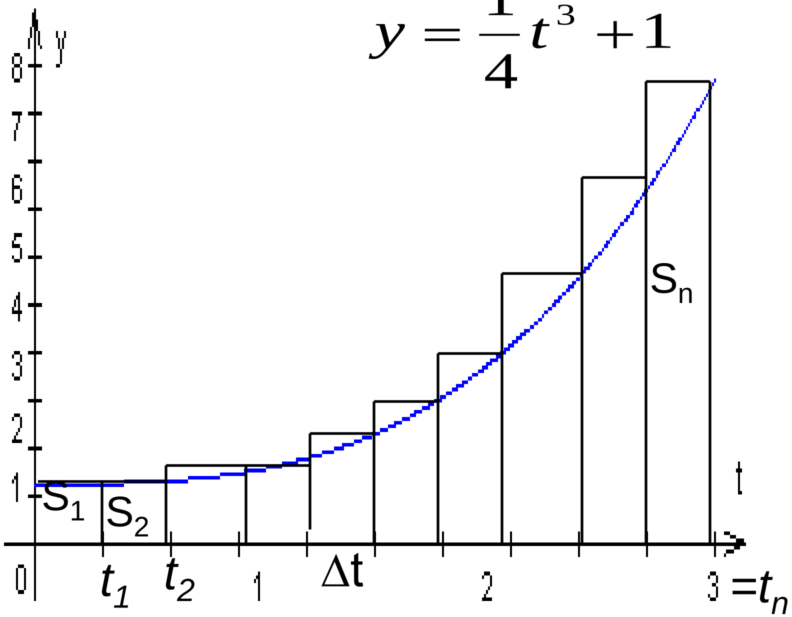
Jarak tempuh=k. Δt.

Bagi selang [0,3] pada sumbu t menjadi n selang bagian dengan lebar $\Delta t=3/n$.

Diperoleh

$0=t_0<t_1<t_2<t_3<\ldots<t_n=3$
$t_i=3i/n$

$$y=\frac{1}{4}t^3+1$$



Pandang poligon luar

$S_{n.}$

Luas $S_n=A(S_n)$

Luas poligon S_i, misalkan $y=f(t)$

$$f(t_i)\Delta t=\left[\frac{1}{4}\left(\frac{3i}{n}\right)^3+1\right]\frac{3}{n}=\frac{81}{4n^4}i^3+\frac{3}{n}$$

$$A(S_n) = f(t_i)\Delta t = f(t_2)\Delta t + \ldots + f(t_n)\Delta t$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{81}{4n^4} i^3 + \frac{3}{n} \right)$$

$$= \frac{81}{4n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n}$$

$$= \frac{81}{4n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + \frac{3}{n} n$$

$$= \frac{81}{16} \left[n^2 \frac{(n^2 + 2n + 1)}{n^4} \right] + 3$$

$$= \frac{81}{16} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) + 3$$

Selanjutnya diperoleh $\lim_{n \to \infty} A(S_n) = \frac{81}{16} + 3 = \frac{129}{16} \approx 8{,}06$

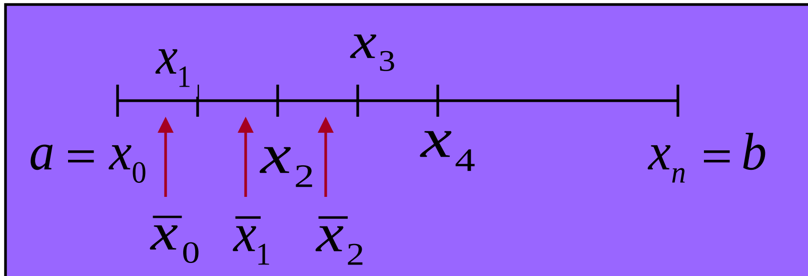
Benda bergerak sejauh 8,06 meter antara $t = 0$ dan $t = 3$

Deskripsi

Jumlah Riemann-Integral Tentu

Diberikan fungsi $y = f(x)$ pada selang $[a,b]$

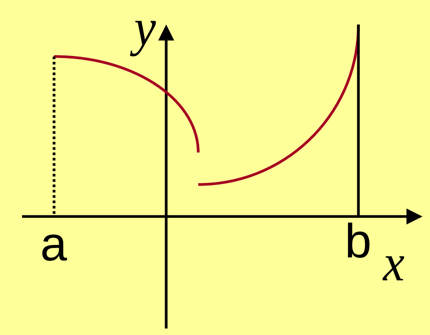
(tidak perlu kontinu asalkan terbatas pada [a,b])



$\bar{x}_i$ Titik sampel pada selang $[x_{i-1},x_i]$

Jumlah Riemann (R_p)

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$



Fungsi f terintegralkan pada [a,b], jhj $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ ada. Selanjutnya $\int_a^b f(x)dx$ disebut **integral tentu (integral Riemann)** f fungsi dari a ke b.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

Deskripsi

Teorema Dasar Kalkulus

Deskripsi

Pandang Kembali Masalah 1

$$y'(t) = v(t) = \frac{1}{4}t^3 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = F(t)$$

Substitusikan $t = 0$ dan $t = 3$ ke $y = f(t)$. Selanjutnya;

$$F(3) - F(0)$$
$$= \frac{1}{16}3^4 + 3 + c - \frac{1}{16}0^4 - 0 - c$$
$$= \frac{81}{16} + 3 = \frac{129}{16}$$

$y = F(t)$	$y' = F'(t)$
$\frac{1}{16}t^4 + t$	$\frac{1}{4}t^3 + 1$
$\frac{1}{16}t^4 + t + 3$	$\frac{1}{4}t^3 + 1$
$\frac{1}{16}t^4 + t - 7$	$\frac{1}{4}t^3 + 1$
$\frac{1}{16}t^4 + t + c$	$\frac{1}{4}t^3 + 1$

Dalam hal ini,

$$\int_0^3 v(t)\,dt = F(3) - F(0)$$

Teorema Dasar Kalkulus :

Jika $F'(x) = f(x)$, pada [a,b] maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Catatan:Jika $F'(x) = f(x)$, pada [a,b], maka ***f*** kontinu pada [a,b]

Jika $y'(t) = v(t)$ **maka** $\int_0^T v(t)dt = y(T) - y(0)$

atau $y(T) = y(0) + \int_0^T v(t)dt$

Fungsi ***f*** kontinu pada [a,b]. Luas daerah ***L*** yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu x, garis $x=a$ dan $x=b$ ditentukan oleh

$$\mathbf{L=} \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

F **disebut** anti derivatif dari fungsi ***f*** dengan $F'(x) = f(x)$,

Deskripsi

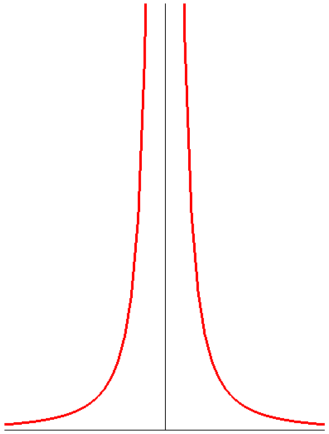
Masalah 2

Periksa $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

Pembahasan

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\left.\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2.$$



Jawaban di atas tidak benar karena hasilnya bernilai negatif, padahal fungsi yang diintegralkan adalah fungsi positif.

Penjelasan

Grafik fungsi $1/x^2$ seperti pada gambar tidak terbatas, karenanya tidak dapat dihitung menggunakan Teorema Dasar Kalkulus.

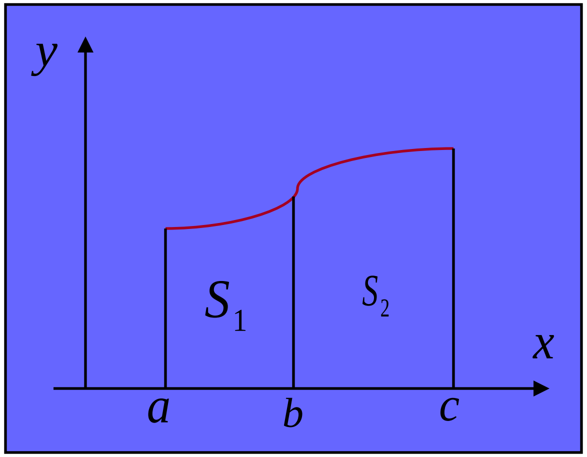
Deskripsi

SIFAT-SIFAT INTEGRAL TENTU

f terintegralkan pada $[a,b]$

SIFAT PENAMBAHAN SELANG

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$



SIFAT LINEAR

$$\text{(i)} \quad \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,\ k \text{ konstanta}$$

$$\text{(ii)} \quad \int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

SIFAT-SIFAT INTEGRAL

Diberikan fungsi-fungsi f, g terintegralkan pada $[a,b]$

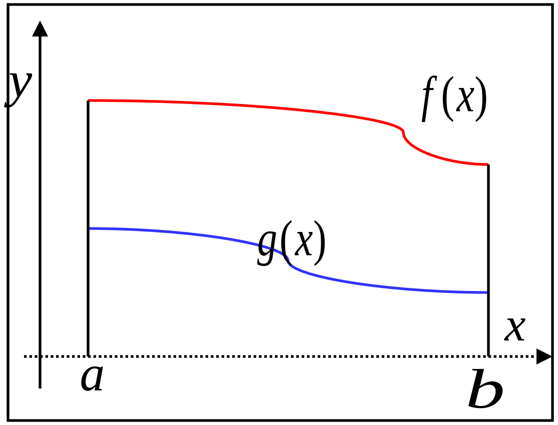
SIFAT PERBANDINGAN

Jika $f(x) \le g(x)$, maka

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Jika $0 \le f(x), \quad \forall x \in [a,b]$
maka

$$0 \le \int_a^b f(x)dx$$



SIFAT PENDIFERENSIALAN INTEGRAL TENTU

Jika f fungsi kontinu pada selang $[a, b]$, dan $x \in [a,b]$ maka

$$D_x\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

Deskripsi

Anti Derivatif-Integral Tak Tentu

Deskripsi

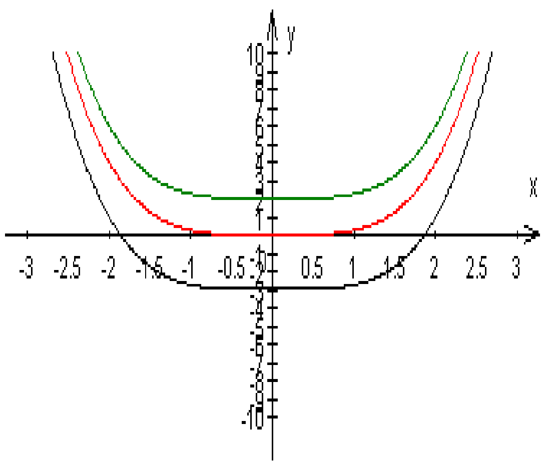
Integral Tak Tentu

Fungsi F *disebut* **anti derivatif** dari fungsi f pada interval I, jika $F'(x)=f(x)$, untuk setiap x di I.

CONTOH 1:

Misalkan $f(x)=x^3$. Jika $F(x)=1/4x^4$ maka $F'(x) = f(x)$

Bentuk paling umum dari anti derivatif f pada I adalah $F(x) + C$ dengan C sembarang konstanta.



Selanjutnya, jika f terintegralkan pada interval I dan F anti derivatif dari fungsi f maka ***intregral tak tentu*** fungsi f adalah

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Deskripsi

TEKNIK PENGINTEGRALAN

- METODE SUBSTITUSI
  - Substitusi langsung ke bentuk standar
  - Substitusi yang merasionalkan
  - Substitusi trigonometri
  - Substitusi dengan melengkapkan menjadi bentuk kuadrat
- METODE PENGINTEGRALAN PARSIAL

Deskripsi

1. METODE SUBSTITUSI

Jika f dan g terdiferensialkan pada [a,b] dan ***u=g(x)***, , **maka**

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Andaikan g fungsi yang terdiferensialkan dan F anti derivatif dari f, jika $u=g(x)$, maka

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

$$= F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Catatan:

Arahkan penggantian untuk memperoleh bentuk-bentuk standar

1. Pengintegralan Fungsi Aljabar

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad n \in Q, n \neq 1$$

2. Pengintegralan Fungsi Trigonometri

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int cosec^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \tan x \sec x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \cot x \; cosec \, x \; dx = -cosec \, x + C$$

1. METODE SUBSTITUSI
Penggantian yang Merasionalkan

Integran memuat bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$

Substitusi $u=\sqrt[n]{ax+b}$

Contoh 2:

Tentukan $\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\,dx$

Pembahasan

Misalkan: $u=(x+1)^{1/5}$

maka $u^5=x+1$

dan $5u^4\,du=dx$

$$\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\,dx=\int x(x+1)^{2/5}\,dx$$

$$=\int (u^5-1)u^2.5u^4\,du$$

$$=5\int (u^{11}-u^6)\,du=\frac{5}{12}u^{12}-\frac{5}{7}u^7+C$$

$$=\frac{5}{12}(x+1)^{12/5}-\frac{5}{7}(x+1)^{7/5}+C$$

1. METODE SUBSTITUSI

Substitusi Trigonometri

Integran berbentuk

$$\sqrt{a^2 - x^2},\ \sqrt{a^2 + x^2},\ \text{atau}\ \sqrt{x^2 - a^2}$$

Fungsi integral	Substitusi dengan	Hasil
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin u$	$a\sqrt{1-\sin^2 u}$ $= a\cos u$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \tan u$	$a\sqrt{1+\tan^2 u}$ $= a\sec u$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sec u$	$a\sqrt{\sec^2 u - 1}$ $= a\tan u$

Contoh 2:

Tentukan $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

Pembahasan

Misalkan $x = a \sin u$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 u} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 u)}$$

$$= \sqrt{a^2\cos^2 u} = a\cos u$$

$$x = a\sin u \Leftrightarrow dx = a\cos u\,du$$

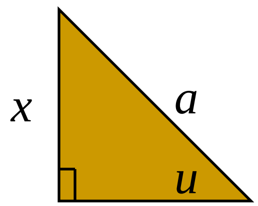
$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int a\cos u\,(a\cos u\,du)$$

$$= \int a^2\cos^2 u\,du = a^2\int \cos^2 u\,du$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2u)\,du = \frac{a^2}{2}\left(u + \frac{1}{2}\sin\ 2u\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}(u + \sin u\cos u) + C$$

Nyatakan kembali ke dalam variabel x



$x = a \sin u$

$$\sin u = \frac{x}{a} \quad \Leftrightarrow \quad u = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\cos u = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

Jadi

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

1. METODE SUBSTITUSI

Melengkapkan menjadi Kuadrat

Integran memuat bentuk $\sqrt{x^2 + Bx + C}$

Lengkapkan $x^2 + Bx + C$ menjadi bentuk kuadrat

Gunakan Substitusi Triginometri

Contoh 4

Tentukan $\int \sqrt{5 - 4x - x^2}\, dx$

2. METODE PENGINTEGRALAN PARSIAL

Misalkan $u = f(x)$ dan $v = g(x)$

maka

$$D_x\left[f(x)g(x)\right] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Karena $dv = g'(x)dx$ dan $du = f'(x)$

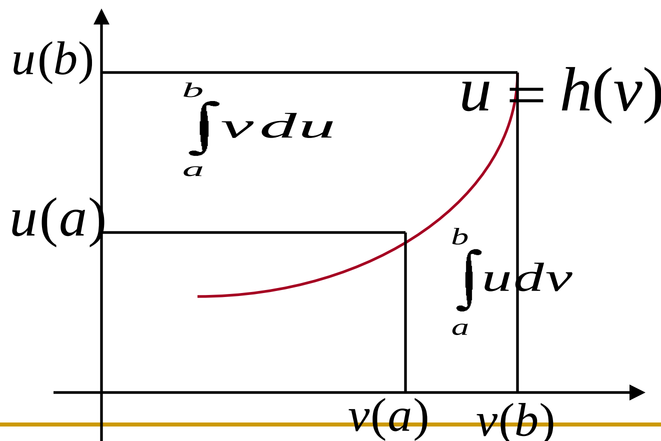
maka

Pengintegralan Parsial Intergral Taktentu

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Pengintegralan Parsial Intergral tentu

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$



Arti geometri Pengintegralan Parsial

$$\int_a^b u\,dv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v\,du$$

Deskripsi