

DINAMIK PADA SISTEM AUTOPARAMETRIK

(Ulasan Teori dan Kajian Beberapa Hasil Penelitian)

Siti Fatimah

Email: sitifatimah@upi.edu

Prodi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika

A short remainder of some theories and results of two studies on an autoparametric system with parametric-excited and a self-excited autoparametric system are discussed in this paper. The perturbation theory is used to investigate the dynamics of systems. Both studies are applying the averaging method to obtain the standardized form in the sense of a small perturbed system. In particular, the stability of the semi-trivial solution is studied on the averaged systems, initiating existence of the non-trivial solutions. Using the numerical bifurcation continuation, the dynamics of the systems are also considered.

In studying the autoparametric system with parametric-excited, the result shows that the semi-trivial solution can co-exist. There exist various type of bifurcations, leading to non-trivial periodic solutions. The study also observed cascades of period-doublings, leading to chaotic solutions. While result in studying a self-excited autoparametric system shows that a rich pattern of different bifurcations such as a robust heteroclinic cycle appears at exact resonance and a breaking of symmetry exists near the resonance.

The aim of this review is to cover the theory and the essential results of the study on autoparametric systems such that can be used for reference of further studies.

Key word: *Autoparametric, chaotic, strange attractor, symmetry breaking*

1. Pendahuluan

Sistem dinamik non-linear telah menjadi topik yang menarik untuk dipelajari sejak tahun 1900-an. Pada bidang ini Henri Poincare (1854-1912) telah memberikan kontribusi besar dengan temuan-temuannya, yang kemudian dijadikan sebagai dasar bagi perkembangan bidang sistem dinamik modern. Hasil studi dari Poincare tentang masalah Tiga-Massa yang dikenal dengan *Newtonian three body problem*, telah memberikan kontribusi bagi perkembangan teori chaos. Pada awalnya Poincare menduga bahwa masalah Tiga-Massa merupakan sistem yang terintegralkan, namun kemudian Poincare menemukan suatu solusi homoklinik (*homoclinic tangle*) yang merupakan penentu dari perilaku *chaotic* pada suatu sistem Hamiltonian. Meskipun penemuan ini menggugurkan asumsi semula, bahwa ternyata sistem Tiga-massa tersebut tak-terintegralkan, dipihak lain temuan ini merupakan awal dari perkembangan teori chaos dan Poincare sebagai peletak dasarnya.

Perkembangan selanjutnya, sampai dengan abad kedua puluhan penemuan-penemuan lain di bidang ini dihasilkan. Tercatat pengembang teori chaos dengan studi-studinya yang didasari oleh penemuan Poincare, diantaranya adalah dan A.M. Lyapunov (1857-1918) dan

G.D Birkhoff (1884-1944), lihat Fatimah (2002). Studi-studi yang mereka lakukan dimotivasi oleh masalah-masalah pergerakan benda angkasa (*celestial mechanics problems*). Studi yang dilakukan berkenaan dengan sistem-sistem yang memiliki sifat mengawetkan energi (*energy-conserving*) dan memenuhi teorema Liouville. Sistem yang demikian selanjutnya dikenal dengan sistem konservatif. Adapun sistem yang tidak mengawetkan energi dikenal dengan sistem non-konservatif. Aplikasi dari sistem non-konservatif menjadi kajian berbagai bidang seperti Fisika, Mekanika, Kimia, dan Biologi (lihat Thompson dan Stewart (2000), Tondl *et al.* (2001)).

Sebagai contoh sistem yang berpotensi memiliki dinamik *chaotic* adalah sistem disipatif. Pada bidang rekayasa sistem ini memiliki ciri yaitu munculnya secara spontan *anisotropy* (pecahnya kesimetrian) yang diakibatkan oleh interaksi antara partikel (massa) untuk rentang waktu yang panjang. Dari sudut pandang sistem dinamik, suatu sistem adalah disipatif jika *phase-flow* atau orbit-orbit dari sistem tersebut divergen negatif. Suatu sistem yang disipatif tidak memiliki titik-titik kritis atau solusi periodik dengan atraktor negatif (*negative attaractor*). Contoh persamaan yang memenuhi sifat disipatif adalah persamaan Volterra-Lotka (Fatimah, 2002).

Selain persamaan di atas, persamaan van Der Pol dengan bentuk sebagai berikut:

$$\ddot{y} + \alpha(y^2 - 1)\dot{y} + \omega_0^2 y = \beta \sin \omega t \quad (1.1)$$

dimana tanda “dot” melambangkan diferensial dari y terhadap waktu t dengan $\alpha > 1$, juga merupakan persamaan yang dinamikanya banyak dipelajari. Secara analitik dan eksperimen persamaan tersebut pertamakali dipelajari oleh van Der Pol (Verhulst, 2006). Pada penelitiannya ia menggunakan sirkuit listrik dengan katup triode. Untuk kasus yang relevan, pada tahun 1877 Lord Rayleigh mempelajari persamaan untuk $\beta = 0$, lihat Cartwright dan Littlewood (1945).

Pada tahun 1949, analisis matematis yang lebih mendalam dari persamaam (1.1) dibahas oleh Cartwirght dan Littlewood dan Levison yang menemukan bahwa solusi dari persamaan tersebut menunjukkan perilaku yang kompleks, lihat Fatimah (2002). Beberapa tahun kemudian, pada tahun 1963 gambar ruang fase (*phase space*) secara geometris dari persamaan tersebut ditampilkan oleh Smile yang menunjukkan perilaku kompleks dari solusi. Perilaku tersebut disebabkan oleh adanya ansambel rentangan (*stretching*) dan lipatan (*folding*) pada ruang fase dari sistem. Berdasarkan ide dari Andronov tentang struktur kestabilan dari dinamik solusi, Smale menggambar secara kualitatif penyebab terjadinya

solusi *chaotic* persis dibawah perturbasi yang kecil. Kondisi ini kemudian dikenal dengan *Smale horseshoe*, lihat Chow dan Hale (1982) dan Wiggins (1988) dan (2003).

Persamaan lain yang berkorelasi dengan persamaan van Der Pol adalah persamaan Rayleigh yang berbentuk:

$$\ddot{y} + y = \alpha(1 - \dot{y}^2)\dot{y} \quad (1.2)$$

Sebagaimana persamaan van Der Pol, persamaan di atas memiliki satu solusi periodik. Studi tentang persamaan ini juga telah banyak dilakukan.

Dipihak lain, studi tentang sistem yang memuat fungsi periodik terhadap waktu yang kemudian dikenal dengan persamaan parametrik juga banyak dibahas. Pada bidang rekayasa persamaan parametrik klasik muncul pada model pendulum yang berayun. Persamaan dari gerak pendulum dinyatakan dengan:

$$\ddot{x} + (a^2 + p(t))\sin x = 0 \quad (1.3)$$

dimana $p(t)$ adalah fungsi periodik dan selanjutnya dikenal dengan bagian eksitasi (*excitation term*). Melalui suatu linearisasi, persamaan di atas akan berbentuk persamaan Mathieu, sebagai berikut:

$$\ddot{x} + (a + \varepsilon \cos 2t)x = 0, \quad a > 0 \quad (1.4)$$

Sebagaimana diketahui untuk model pada persamaan (1.3), parameter a dan period dari eksitasi $p(t)$ dapat menimbulkan fenomena instability yang dikenal dengan resonansi (*resonance*).

Sebagaimana telah diuraikan di atas, terdapat banyak kajian yang telah dilakukan pada sistem-sistem yang memuat persamaan (1.1), (1.2) atau (1.4). Pada tahun 1993 Tondl mempelajari suatu sistem yang kemudian dikenal sebagai sistem autoparametrik (*autoparametric system*), lihat Tondl dan Nabergoj (1993). Teori mengenai sistem ini dibahas dalam buku *Autoparametric Resonance in Mechanical System* yang ditulis Tondl bersama dengan rekan-rekannya pada tahun 2000. Studi mengenai sistem autoparametrik yang memuat persamaan (1.4) telah dikaji oleh Fatimah (2001) dan Fatimah dan Ruijgrok (2002). Sistem yang dipelajari dikenal dengan sistem yang tereksitasi secara parametrik/*parametrically excited system*. Adapun sistem autoparametrik yang memuat persamaan (1.2) (sistem yang tereksitasi sendiri/*self-excited system*) dipelajari dalam Abadi (2001).

Kedua kajian tersebut menggunakan pendekatan serupa dalam mempelajari masing-masing sistem, diantaranya kajian diawali dengan mempelajari bentuk normal dari sistem. Pada bentuk normal, bagian sistem linear dipelajari untuk mengetahui sifat-sifat dasar dari

sistem, untuk kemudian dipelajari apakah aspek nonlinear akan mengawetkan atau tidak sifat-sifat tersebut. Untuk kepentingan ini, kedua kajian menggunakan teori perturbasi. Selain itu, kedua kajian juga menggunakan metode yang sama yaitu *averaging method* untuk mendapatkan bentuk standar dari sistem yang terperturbasi. Kestabilan sistem dipelajari dengan memulai dari solusi semitrivial, untuk kemudian bifurkasi dari solusi ini juga dipelajari dengan mendalam.

Kedua kajian tersebut menunjukkan hasil yang secara kualitatif berbeda dimana masing-masing sistem yang dipelajari memiliki dinamik yang kompleks dan menarik. Pada kajian Fatimah ditemukan fenomena munculnya struktur *strange attractor* yang diawali dengan ditemukannya *periodic doubling*. Struktur tersebut teridentifikasi menyebabkan solusi *chaotic* pada sistem. Studi analitik dan numerik mengenai dinamik dari sistem tersebut dilakukan dengan mendalam. Adapun kajian Abadi menunjukkan adanya kasus resonan yang terdiri dari resonan eksak dan resonan tak-eksak. Pada kasus resonan eksak ditemukan adanya *limit cycle* pada sistem yang kemudian pecah dan disusul dengan kemunculan sebuah *robust heteroclinic cycle yang stabil*. Adapun pada kasus resonan tak-eksak ditemukan pecahnya kesimetrian solusi.

Pada tulisan ini diulas beberapa catatan penting tentang teori dasar dalam mempelajari dinamik suatu sistem, kemudian beberapa catatan tentang sistem autoparametrik dan resonansi parametrik. Catatan utama dalam tulisan ini adalah hasil-hasil utama studi tentang sistem autoparametrik yang tereksitasi secara parametrik yang dikaji Fatimah dan sistem autoparametrik yang tereksitasi secara sendiri yang dikaji oleh Abadi. Tujuan dari ulasan ini untuk mendeskripsikan hasil-hasil utama yang ditemukan sebagai bahan referensi dalam mempelajari dinamik dari sistem autoparametrik.

2. Teori Dasar Dinamik suatu Sistem

2.1 Aspek Bentuk Normal Suatu Sistem Autonomus

Perhatikan sistem yang dikaji Abadi (2001). Sistem tersebut tidak bergantung kepada variable waktu t , sistem yang demikian disebut sistem yang autonomus. Pada saat mempelajari sistem non-linear yang autonomus berikut:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

dimana $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah C^∞ , hal pertama yang dikaji dalam mempelajari sistem (2.1) adalah dinamik disekitar titik tetap (*fixed point*) dari sistem tersebut. Salah satu jenis titik tetap yang dipelajari adalah titik tetap hiperbolik. Titik tetap $\bar{x}$ disebut titik tetap hiperbolik,

jika $D_y f(\bar{x})$ tidak mempunyai nilai eigen dengan bagian realnya nol. Berikut teorema dasar yang digunakan untuk mempelajari sistem (2.1).

Teorema: (Hartman-Grobman)

Jika $\bar{x}$ adalah titik tetap hiperbolik maka ada suatu homeomorfisma h yang terdefinisi pada suatu persekitaran U dari $\bar{x}$ di $\mathbb{R}^n$.

Untuk keterangan lebih mendalam dapat dilihat Hartman (2002).

Untuk karakterisasi perilaku dari solusi (2.1) di sekitar titik tetap $\bar{x}$, sistem non-linear (2.1) dilinearisasi di $\bar{x}$ sehingga diperoleh suatu sistem berbentuk:

$$\dot{y} = D_y f(\bar{x})y + f(y), \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

dengan $D_y f(\bar{x}) = [\partial f / \partial y (\bar{x})]$ adalah matriks Jacobian dari turunan parsial pertama dari f . Pada (2.2), $f(y)$ dapat diekspansi ke dalam bentuk polinom vektor yang homogen, dengan suku pertamanya adalah bentuk kuadrat, sebagai berikut:

$$f(y) = f_2(y) + f_3(y) + \dots \quad (2.3)$$

vektor polinomial $f_m(y)$ adalah homogen dengan derajat $m > 2$.

Proses di atas dikenal dengan istilah normalisasi. Proses dilakukan untuk menghilangkan sebanyak mungkin suku-suku non-linear dari sistem (2.1) melalui serangkaian transformasi yang dilakukan secara berurutan. Idealnya normalisasi melalui transformasi membawa sistem (2.1) ke bentuk sistem yang linear. Namun pada umumnya, normalisasi tidak dapat menghilangkan sepenuhnya suku-suku non-linear dari suatu sistem yang non-linear.

Untuk melakukan normalisasi pada sistem di sekitar titik tetap $\bar{x}$, dikenalkan transformasi berbentuk:

$$y = x + h_2(x) + h_3(x) + \dots \quad (2.4)$$

dimana $h_m(x)$ polinomial vektor yang homogen dengan derajat m . Dalam hal ini polinomial $h_m(x)$ tidak diketahui dan ditentukan kemudian dengan melakukan substitusi transformasi (2.4) ke sistem (2.1).

Konsep dasar lain berkenaan dengan nilai-nilai eigen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dari matriks $[\partial f / \partial y (\bar{x})]$. Nilai-nilai eigen tersebut adalah resonan jika untuk suatu i , dengan $i = 1, 2, \dots, n$ memenuhi:

$$\sum_{j=1}^n m_j \lambda_j = \lambda_i \quad (2.5)$$

dengan $m_j \geq 0$ adalah bilangan bulat dan $m_1 + m_2 + \dots + m_n \geq 2$. Jika tidak memenuhi (2.5) maka nilai-nilai eigen tersebut disebut non-resonan.

Jika nilai-nilai eigen matriks di atas adalah non-resonan maka semua suku non-linear dari sistem dapat dihilangkan, dan sistem tersebut dapat ditransformasikan ke bentuk sistem yang linear. Pada kenyataannya, hanya sedikit sistem non-linear yang dapat dibawa ke bentuk linear. Dari segi kajianpun, tidak akan terlalu menarik mempelajari sistem yang linear saja. Untuk keperluan studi, sistem-sistem yang dipelajari dinormalisasi dengan tujuan untuk memindahkan suku-suku non-resonan ke suatu derajat yang lebih tinggi dengan maksud untuk kepentingan penyederhanaan dalam melakukan penganalisaan.

2.2 Normalisasi Sistem Non-autonomus

Dalam banyak masalah sebagaimana halnya sistem yang tereksitasi secara parametrik, sistem bergantung kepada variabel waktu t . Perhatikan bahwa pada persamaan Mathieu, persamaan tersebut memuat t (secara eksplisit) selain variabel x yang juga bergantung kepada t , fungsi yang demikian sering disebut persamaan parametrik.

Misalkan bentuk umum dari persamaan parametrik sebagai berikut:

$$\dot{x} = F(x, \mu, t) \quad (2.7)$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$ dan parameter $\mu \in \mathbb{R}^p$. Fungsi $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah C^∞ terhadap x dan μ , dan F periodik terhadap t dengan periode T . Asumsikan bahwa $x = 0$ adalah solusi dari (2.7), sehingga $F(0, \mu, t) = 0$. Asumsikan pula bagian linear dari *vectorfield* $D_x F(0, 0, t)$ tidak bergantung kepada t , $\forall t \in \mathbb{R}$. Misalkan bahwa $A_0 = D_x F(0, 0, t)$. Ekspansi $F(x, \mu, t)$ ke dalam deret Taylor terhadap x dan μ menghasilkan persamaan:

$$\dot{x} = A_0 x + \sum_{m=2}^k F_m(x, \mu, t) + o(|x, \mu|^{k+1}) \quad (2.8)$$

dengan $F_m(x, \mu, t)$ adalah polinomial homogeny dari x dan μ berderajat m dengan koefisien-koefisien T – periode.

Berikut adalah teorema-teorema yang mendasari normalisasi pada persamaan parametrik.

Teorema:

Diberikan persamaan (2.7), maka terdapat transformasi $x = \hat{x} + \sum_{n=2}^k \hat{P}_n(x, \mu, t)$, dimana $\hat{P}_n(x, \mu, t)$ adalah polinomial dari x dan μ berderajat n dengan koefisien-koefisien T – periode, sehingga persamaan (2.8) menjadi:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_0 x + \sum_{m=2}^k \hat{F}_m(x, \mu, t) + o(|x, \mu|^{k+1}) \\ \dot{\mu} &= 0\end{aligned}\quad (2.9)$$

dengan persamaan order tingkat rendahnya adalah:

$$\dot{x} = A_0 x + \sum_{m=2}^k F_m(x, \mu, t) = \hat{F}(x, \mu, t) \quad (2.10)$$

yang kemudian disebut bentuk normal dari persamaan (2.7).

Teorema:

Persamaan normal (2.10) memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

- $\frac{d}{dt} e^{A_0^* t} \hat{F}(e^{-A_0^* t}, \mu, t) = 0$, untuk semua $(x, \mu) \in \mathbb{R}^{n+p}$, $t \in \mathbb{R}$.
- Jika persamaan (2.7) invarian terhadap suatu involusi, yaitu; $SF(x, \mu, t) = F(Sx, \mu, t)$ dengan S adalah operator linear yang invertibel sehingga $S^2 = I$ maka bentuk normal (2.10) juga invariant terhadap S . Hal serupa, jika dipenuhi $SF(x, \mu, t) = -F(Sx, \mu, t)$, maka (2.10) juga invariant terhadap S .

Bukti teorema ini dapat dilihat pada Iooss dan Adelmeyer (1992).

Teorema di atas akan digunakan untuk kasus A_0 semi-simple dan nilai-nilai eigennya yaitu $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ adalah imajiner murni. Selanjutnya dapat diambil $A_0 = \text{diag}\{i\lambda_1, \dots, i\lambda_n\}$. Beberapa sifat penting yang bermanfaat untuk mempelajari sistem non-autonomus dengan kondisi tersebut dipenuhi, yaitu:

- Suku-suku $x_1^{\gamma_1}, \dots, x_n^{\gamma_n} e^{i\frac{2\pi}{T}kt}$ adalah komponen ke j dari deret Taylor-Fourier dari $F(x, \mu, t)$, jika $-\lambda_j + \frac{2\pi}{T}k + \gamma_1\lambda_1 + \dots + \gamma_n\lambda_n = 0$. Kondisi ini disebut kondisi resonan.
- Transformasikan bentuk normal dengan menggunakan $x = e^{A_0 t} w$ akan menghasilkan persamaan autonomus untuk w :

$$\dot{w} = \sum_{m=2}^k F_m(w, \mu, 0) \quad (2.11)$$

- Jika persamaan (2.7) invarian terhadap involusi S maka persamaan (2.11) juga invarian terhadap S . Bukti dapat dilihat pada Ruijgrok *et al.* (1993).

Sifat 2) menunjukkan bahwa sistem non-autonomus dapat ditransformasikan menjadi sistem yang autonomus asalkan kondisi-kondisi sebagaimana disebutkan di atas dipenuhi. Dalam hal mempelajari dinamik sistem yang tereksitasi secara parametrik, ini bermanfaat untuk membuktikan keberadaan dari solusi periodic dan torus invarian dari sistem tersebut.

2.3 Teori Bifurkasi

Terdapat banyak sumber referensi berkenaan dengan ide dasar teori bifurkasi untuk dinamik non-linear. Beberapa diantaranya Chow dan Hale (1982), Guckenheimer dan Holmes (1990), Thompson and Stewart (2000), Wiggins (2003), dan Verhulst (2006). Teori dasar tersebut fokus pada sistem berikut yang bergantung pada parameter μ yang berdimensi- k , sebagai berikut:

$$\dot{x} = f_{\mu}(x); \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^k \quad (2.12)$$

Solusi ekuilibrium dari persamaan (2.12) diperoleh dengan menyelesaikan $f_{\mu}(x) = 0$. Jika parameter μ bergerak (bervariasi) maka teorema fungsi implisit menjamin bahwa solusi-solusi ekuilibria yang bersesuaian dengan μ dinyatakan sebagai fungsi mulus (*smooth function*) yang jauh dari titik-titik yang diperoleh pada kondisi turunan Jacobian $D_x f_{\mu}$ mempunyai nilai-eigen nol. Grafik dari fungsi-fungsi mulus tersebut merupakan bifurkasi dari ekuilibria (2.12). Nilai dari parameter $\mu = \mu_0$ yang menyebabkan bagian real dari nilai-nilai eigen $D_x f_{\mu}$ adalah nol, disebut nilai bifurkasi.

Bifurkasi adalah perubahan kualitatif suatu dinamik dari sistem pada saat parameter μ melewati μ_0 . Pada sistem autonomus ini menggambarkan perubahan topologi pada ruang fase dari sistem. Contohnya, ekuilibria yang dihasilkan pada $\mu = \mu_0$ berupa titik *saddle*. Secara topologis titik ini memiliki dua buah persekitaran *attracting node*, pada saat μ melewati μ_0 , kedua *attracting node* bergabung menjadi satu *attracting node*. Pada dunia rekayasa kondisi ini disebut struktur yang tak-stabil (*unstable*). Adanya sedikit perubahan pada μ , mengakibatkan perubahan secara kualitatif. Kadang-kadang perubahan pada skala yang kecil menunjukkan perubahan yang dramatik.

Bifurkasi yang paling sederhana untuk dipelajari adalah bifurkasi dimensi-1 dari ekuilibria dengan parameter berdimensi-1. Pada kasus ini, diasumsikan persamaan normal dipelajari disekitar solusi-solusi ekuilibrium dari sistem. Untuk kemudian bifurkasi ini dikenal dengan bifurkasi lokal dari sistem. Beberapa jenis bifurkasi lokal adalah sebagai berikut:

- a. *Bifurkasi saddle-node*, digambarkan dengan $\dot{x} = \mu - x^2$. Jika $\mu < 0$ tidak ada solusi ekuilibrium, pada saat $\mu = 0$ terdapat dua solusi ekuilibrium, satu stabil dan yang lainnya tak-stabil.
- b. *Bifurkasi transkritikal*, digambarkan dengan $\dot{x} = \mu x - x^2$. Terdapat dua solusi ekuilibrium yaitu $x = 0$ dan $x = \mu$, keduanya mengalami perubahan kestabilan pada saat μ melewati 0.

- c. *Bifurkasi pitchfork*, digambarkan dengan $\dot{x} = \mu x - x^3$. Jika $\mu < 0$ tidak ada solusi ekuilibrium, yaitu $x = 0$ yang merupakan solusi yang stabil. Jika $\mu > 0$ ada tiga buah solusi, yaitu solusi tak-stabil $x = 0$, dan dua buah solusi stabil $x = \pm\sqrt{\mu}$.
- d. *Bifurkasi solusi periodik (bifurkasi Hopf)*, dapat terjadi bila nilai-nilai eigen dari Jacobian $D_x f_\mu$ dari persamaan normal pada sebuah solusi ekuilibrium memiliki dua buah nilai yang imajiner murni, sedangkan yang lainnya bagian realnya tidak nol. Kondisi ini ditemukan pada persamaan van Der Pol.

Kelebihan dari mempelajari bifurkasi lokal adalah asumsi dipersekitaran solusi ekuilibrium lebih mudah diperoleh secara eksplisit. Metode yang efektif untuk digunakan selain metode penormalan adalah metode averaging yang akan diulas pada bagian 2.4. Bifurkasi lain yang lebih kompleks adalah bifurkasi global. Bifurkasi ini dapat terjadi secara tiba-tiba karena adanya perubahan skala yang besar pada sistem dinamik. Beberapa konsep penting adalah sebagai berikut:

- a. *Bifurkasi Neimark-Sacker*. Bifurkasi ini muncul biasanya pada sebuah torus yang berhubungan dengan orbit periodik. Untuk kasus solusi di ruang dimensi-4, asumsikan bahwa ada orbit periodik dikarakterisasi oleh empat nilai eigen, dimana paling sedikit dua diantaranya bilangan kompleks. Pada saat parameter bergerak, nilai-nilai eigen tersebut juga berubah menjadi imajiner. Dalam hal ini bifurkasi Neimark-Sacker muncul.
- b. *Bifurkasi Silnikov*. Misalkan X adalah medan vector yang mulus (*smooth vector field*) pada $\mathbb{R}^3$, dengan titik ekuilibrium $O = (0,0,0)$ dimana nilai-nilai eigen dari O adalah $\alpha \pm i\beta$, terdapat λ sehingga $|\alpha| < |\lambda|$ dan $\beta \neq 0$. Ekuilibrium O memiliki orbit homoklinik, maka ada $X + \mu Y$ suatu perturbasi kecil pada medan vector yang memuat pemetaan horseshoe. Pemetaan ini menyebabkan munculnya tak berhingga banyak orbit-orbit periodik dan chaos. Kesulitan untuk mempelajari bifurkasi Silnikov adalah dalam hal menunjukkan keberadaan dari orbit homoklinik.
- c. *Siklus Heteroklinik*. Misalkan solusi pada ruang dimensi-3 atau dimensi-4. Suatu simetri dapat memunculkan siklus heteroklinik Robust yang menghubungkan dua atau lebih struktur *saddle-sink*. Pembahasan lebih mendalam dapat dilihat pada Krupa (1997).

2.4 Metode Perturbasi: *averaging method*

Pada sistem autoparametrik yang dibahas Fatimah dan Ruijgrok (2002) dan Abadi (2001), keduanya melibatkan parameter $\varepsilon \gg 0$ yang kecil. Misalkan sistem terperturbasi berikut:

$$\dot{x} = f(x, t) + \varepsilon g(x, t, \varepsilon), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.13)$$

dimana $\varepsilon g(x, t, \varepsilon)$ adalah suku perturbasi dari sistem (2.13). Asumsikan bahwa solusi dari sistem (2.13) yang tidak diberi perturbasi ($\varepsilon = 0$) diketahui dan sistem (2.13) dapat disusun kembali ke dalam bentuk:

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t) + \varepsilon^2 g(x, t, \varepsilon), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.14)$$

dimana f dan g berperiode- T terhadap variabel t . Persamaan *averaged* dari (2.5) adalah:

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) \quad y(t_0) = x_0, \quad (2.15)$$

dengan $f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt$. Solusi $y(t)$ dari (2.15) adalah aproksimasi dari solusi $x(t)$ dari (2.14), dimana $x(t) - y(t) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Teorema tentang metode *averaging* dapat ditemukan dalam Sanders dan Verhulst (1985).

3. Catatan pada Sistem Autoparametrik dan Resonansi Autoparametrik

Sistem autoparametrik merupakan sistem getaran (*vibrating system*) yang terdiri dari paling sedikit dua buah sub-sistem: sistem utama dan sistem sekunder. Ada pula yang menyebutnya dengan sub-sistem osilator dan sub-sistem yang tereksitasi. Kedua sub-sistem ini berinteraksi secara non-linear, yaitu dipasangkan sehingga sub-sistem yang tereksitasi dapat diam sementara osilatornya bervibrasi. Kondisi yang demikian disebut solusi semi-trivial atau pada bidang Fisika disebut mode normal. Sistem utama dapat memuat eksitasi eksternal, eksitasi sendiri, eksitasi parametrik, atau kombinasi dari eksitasi-eksitasi tersebut. Contoh dari sistem autoparametrik yang tereksitasi secara parametrik adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x'' + k_1 x' + q_1^2 x + ap(\tau)x + f(x, y) &= 0 \\ y'' + k_2 y' + q_2^2 x + g(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Sistem (3.1) telah dipelajari Fatimah dan Ruigrok (2002). Contoh yang lain adalah sistem autoparametrik yang tereksitasi sendiri sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x'' - \beta(1 - x'^2)x' + x + \gamma_1 y^2 &= 0 \\ y'' + \kappa y' + q^2 y + \gamma_1 xy &= 0 \end{aligned}$$

sistem tersebut telah dipelajari Abadi (2001).

Contoh klasik dari sistem autoparametrik adalah pendulum elastik yang terdiri dari pegas yang tetap di bagian ujungnya. Pegas mungkin dapat berayun pada bidang sebagaimana pendulum bergerak, dan dipihak lain pegas juga dapat beresilasi. Dari kajian-kajian yang telah dilakukan, fenomena menarik adalah pada saat rasio dari frekuensi-frekuensi linear pada arah transversal dan longitudinal adalah 2:1. Pada kasus ini, jika pegas beresilasi dekat dengan arah vertikal, maka gerakan dari mode normal adalah tak-stabil, kemudian secara perlahan-lahan energi akan ditransferkan pada gerakan berayun kemudian kembali lagi. Fenomena penstabilan mode normal (solusi semi-trivial) yang disebabkan oleh penyetelan pada frekuensi-frekuensi tertentu disebut resonansi autoparametrik atau ketakstabilan autoparametrik.

Pada masalah aktual, misalnya bidang teknik, kehilangan kestabilan pada solusi semi-trivial bergantung pada penyetelan frekuensi-frekuensi khusus, juga pada interaksi antara sistem utama dengan sistem sekundernya. Sifat utama yang penting adalah bahwa vibrasi autoparametrik terjadi pada daerah parameter-parameter yang terbatas. Dalam banyak masalah, tujuan utama mempelajari sistem autoparametrik adalah untuk mengurangi vibrasi dari amplitudo sistem utamanya.

4. Catatan dari Studi Sistem Autoparametrik yang Tereksitasi Secara Parametrik

Hasil berikut merupakan kajian Fatimah (2001) dan Fatimah dan Ruijgrok (2002). Misalkan sistem autoparametrik yang memuat sebuah osilator, dipasangkan dengan sub-sistem yang tereksitasi secara parametrik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}x'' + x + \varepsilon(k_1 x' + \sigma_1 x + a \cos 2\tau x + \frac{4}{3}x^3 + c_1 y^2 x) &= 0 \\y'' + y + \varepsilon(k_2 y' + \sigma_2 y + \frac{4}{3}y^3 + c_2 x^2 y) &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

dimana σ_1 dan σ_2 adalah detuning dari osilator-osilator dengan resonan 1:1. Sistem (4.1) invariant terhadap $(x, y) \rightarrow (x, -y)$, $(x, y) \rightarrow (-x, y)$ dan $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$. Metode averaging digunakan sebagai prosedur untuk mendapatkan bentuk normal dari sistem (4.1), kemudian dipelajari kestabilan solusi dari sistem tersebut. Misalkan transformasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}x &= u_1 \cos \tau + v_1 \sin \tau & ; & & x' &= -u_1 \sin \tau + v_1 \cos \tau \\y &= u_2 \cos \tau + v_2 \sin \tau & ; & & y' &= -u_2 \sin \tau + v_2 \cos \tau\end{aligned}$$

setelah penskalaan kembali pada hasil transformasi di atas dengan memisalkan $\tau = \frac{\varepsilon}{2}t$ diperoleh sistem berikut:

$$\begin{aligned}
u_1' &= -k_1 u_1 + \left(\sigma_1 - \frac{1}{2}a\right)v_1 + v_1(u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{4}c_1 u_2^2 v_1 + \frac{3}{4}c_1 v_2^2 v_1 + \frac{1}{2}c_1 u_1 u_2 v_2 \\
v_1' &= -k_1 v_1 - \left(\sigma_1 + \frac{1}{2}a\right)u_1 - u_1(u_1^2 + v_1^2) - \frac{3}{4}c_1 u_2^2 u_1 - \frac{1}{4}c_1 v_2^2 u_1 - \frac{1}{2}c_1 v_1 u_2 v_2 \\
u_2' &= -k_2 u_2 + \sigma_2 v_2 + v_2(u_2^2 + v_2^2) + \frac{1}{4}c_2 u_1^2 v_2 + \frac{3}{4}c_2 v_1^2 v_2 + \frac{1}{2}c_2 u_1 u_2 v_1 \\
v_2' &= -k_2 v_2 - \sigma_2 u_2 + u_2(u_2^2 + v_2^2) - \frac{3}{4}c_2 u_1^2 u_2 - \frac{1}{4}c_2 v_1^2 u_2 - \frac{1}{2}c_2 u_1 v_2 v_1
\end{aligned} \tag{4.2}$$

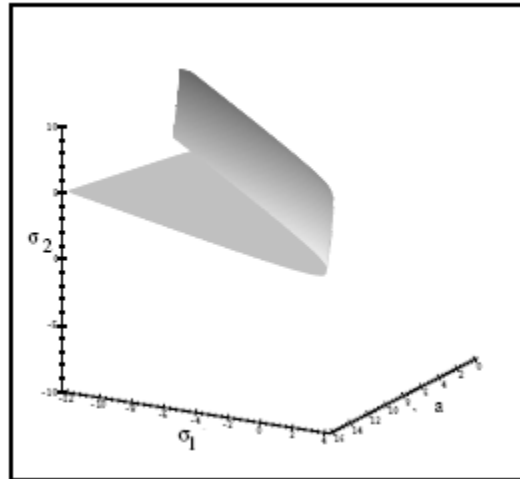
Matriks Jacobian pada titik $X_0 = (\pm u_0, \pm v_0, 0, 0)$ yang berkorespondensi dengan solusi semi-trivial sistem (4.1) adalah:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

dengan A_{11} dan A_{22} adalah matriks 2×2 yang bergantung kepada u_1, v_1, u_2, v_2 .

4.1 Kestabilan dan Bifurkasi dari Solusi Semi-trivial

Batas kestabilan solusi semi-trivial X_0 dari sistem (4.2) diperoleh dengan menyelesaikan $\det A_{11} \det A_{22} = 0$. Pada bidang parameter dimensi-3 (a, σ_1, σ_2) , batas permukaan kestabilan X_0 diperlihatkan pada Gambar 4.1. Di bagian dalam kurva X_0 tak-stabil, dan stabil di luar kurva.

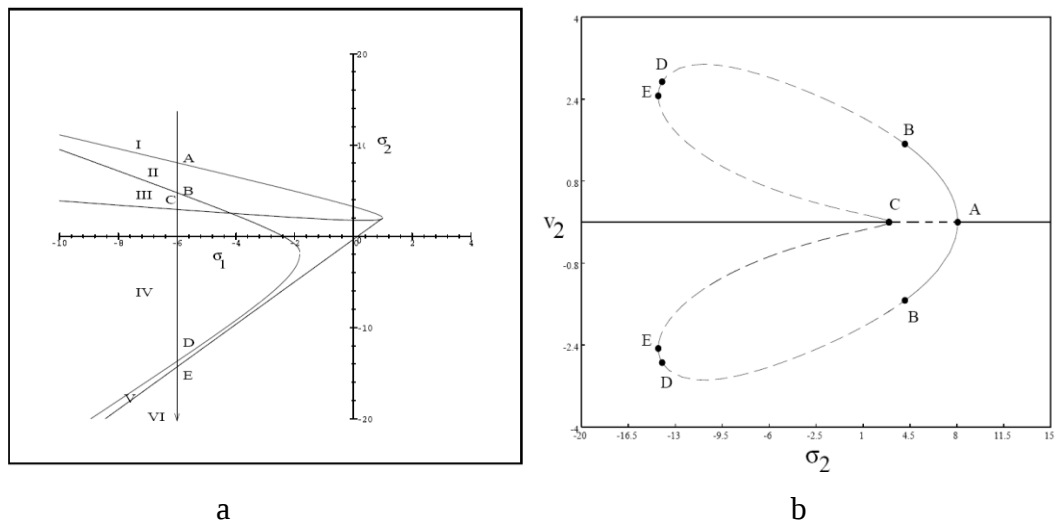


Gambar 4.1. Batas kestabilan solusi sistem (4.2) pada ruang (a, σ_1, σ_2) untuk $k_1 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ dan $k_2 = 1$.

Pada Gambar 4.2.a diperlihatkan diagram parameter dari sistem (4.2) pada bidang (σ_1, σ_2) . Dalam hal ini nilai a ditetapkan untuk $a > 2k_1$, $c_1 > 0$, dan $c_2 < 0$. Pada daerah I, solusi semi-trivial X_0 stabil. Melewati batas dari daerah I ke daerah II, X_0 menjadi tak-stabil dan muncul sebuah solusi non-trivial yang stabil. Selanjutnya, solusi non-trivial ini menjadi tak-stabil saat melewati batas dari daerah II ke III. Solusi semi-trivial menjadi stabil pada saat melewati batas dari daerah III ke IV, dan muncul lagi sebuah solusi non-trivial yang tak-stabil. Solusi non-trivial ini kemudian berubah kestabilan pada saat melewati batas dari

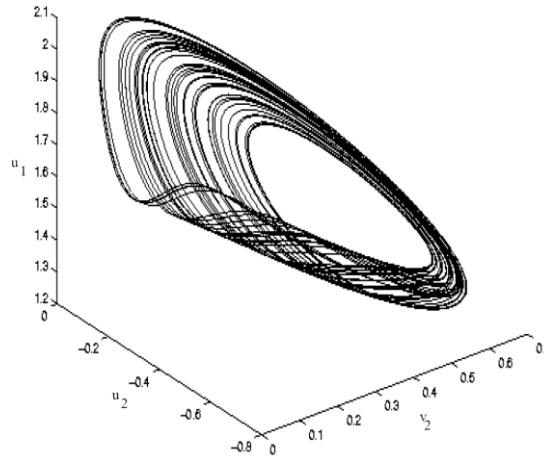
daerah IV ke daerah V menjadi stabil dan muncul bifurkasi Hopf. Akhirnya, melewati batas dari daerah V ke daerah VI, kedua solusi non-trivial bersatu dan hilang pada bifurkasi saddle-node.

Menggunakan program kontinuitas CONTENT (lihat Kuznetsov (1998)) digunakan untuk mempelajari bifurkasi dari solusi non-trivial dari sistem (4.2), hasilnya ditunjukkan pada Gambar 4.2.b.



Gambar 4.2. a. Diagram parameter dari sistem (4.2) pada bidang (σ_1, σ_2) . Titik-titik A dan C menunjukkan titik-titik bifurkasi dari solusi semi-trivial. Titik-titik B dan D adalah titik-titik Hopf dan E titik saddle-node. b. Diagram kestabilan dari sistem (4.2) pada bidang (v_2, σ_2) , garis putus-putus menunjukkan solusi tak-stabil, sedangkan garis yang tidak putus-putus menunjukkan solusi stabil.

Untuk $a = 2.1$ pada Gambar 2.b, terdapat orbit periodik pada interval $5,4119 < \sigma_2 < 5,5371$. Pada saat σ_2 berkurang muncul *periodic doubling* dari solusi periodik yang stabil. Terdapat banyak bifurkasi dari *periodic doubling* sampai dengan nilai $\sigma_2 = 5,2505$. Dalam hal ini ada indikasi kuat munculnya bifurkasi Silnikov. Untuk nilai-nilai σ_2 pada interval $5,2505 < \sigma_2 < 5,3195$ muncul *strange attractor* sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 5.3.



Gambar 4.3. *Stranger Attractor* dari sistem (4.2). Potret fase pada ruang (u_2, v_2, u_1) .

4.2 Bifurkasi Global dan Solusi Chaotic

Studi analisis lebih lanjut dari sistem (4.2) berdasarkan pada studi yang dilakukan Fatimah (2001). Tujuan dari studi tersebut adalah untuk menunjukkan eksistensi dari solusi periodik, kuasi-periodik atau chaotic dengan lebih ketat.

Misalkan X_0 titik tetap dari sistem (4.2), translasi $X = X_0 + Z$ membawa sistem ke:

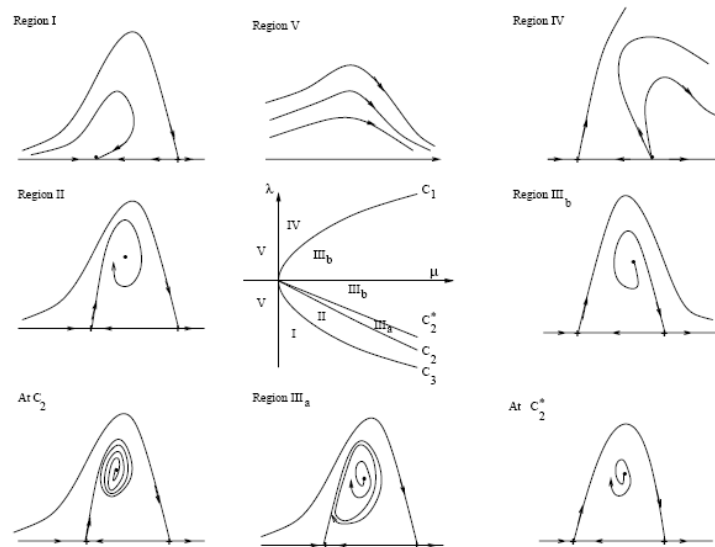
$$Z' = F(X_0 + Z) = G(Z) \quad (4.4)$$

Bagian linear dari $G(Z)$ mempunyai bentuk $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. Bifurkasi yang dipelajari adalah pada saat nilai-nilai eigen dari A_1 dan A_2 bernilai nol. Bifurkasi dari nilai eigen ganda ini berbeda dengan bifurkasi standar Bogdanov-Takens, sebab sistem (4.4) mempunyai simetri $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$.

Simetri di atas membawa sistem pada persamaan bifurkasi sebagai berikut:

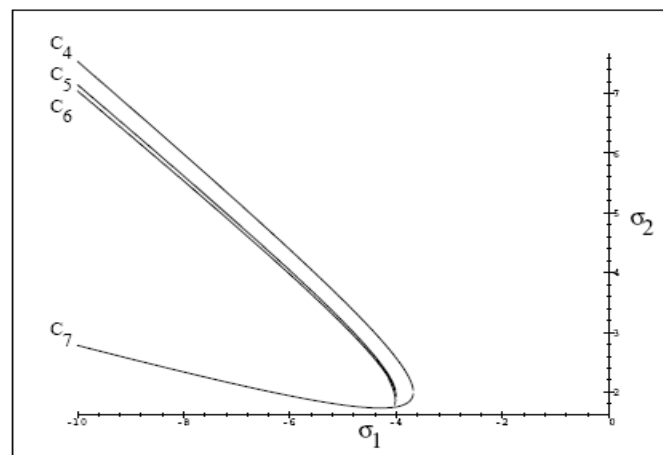
$$\begin{aligned} x' &= -\mu - rx^2 + y^2 \\ y' &= \lambda y - xy + y^3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

dimana μ dan λ adalah parameter-parameter bifurkasi, r konstanta dengan $r \neq 0$ dan $-1 < r < 0$. Hasil analisis menunjukkan bahwa ada persekitaran U dari $(x, y) = (0, 0)$ dan persekitaran V dari $(\mu, \lambda) = (0, 0)$ sehingga V terbagi menjadi beberapa daerah sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4. Potret-fase persamaan (4.5) pada bidang (x, y) untuk nilai (μ, λ) tertentu pada setiap daerah.

Transformasikan kembali kepada parameter (σ_1, σ_2) untuk merekonstruksi diagram parameter pada sistem asal (4.2). Hasilnya diperoleh diagram parameter sebagaimana diperlihatkan pada Gambar (4.5). Terdapat satu solusi periodik yang stabil pada daerah diantara C_5 dan C_6 . Solusi periodik ini mengalami bifurkasi *period doubling*, yang kemudian muncul strange attractor sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 4.5.



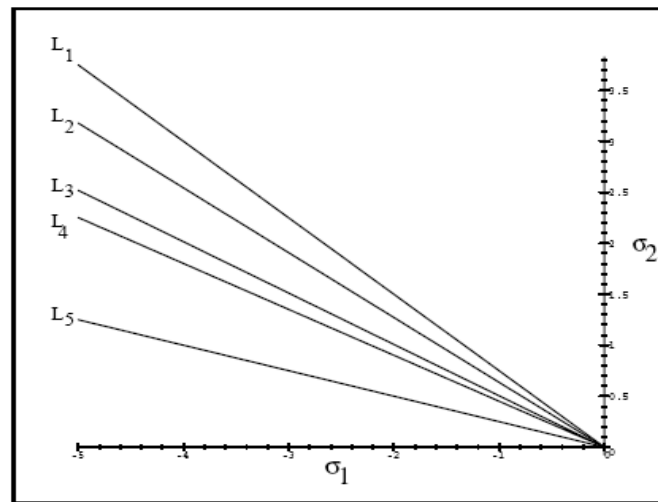
Gambar 4.5. Diagram parameter dari sistem (4.2) pada bidang (σ_1, σ_2) , untuk nilai-nilai $k_1 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ dan $k_2 = 1$.

4.3 Studi Analitik dari Solusi Chaotik dengan Metode Perluasan Melnikov

Metode perluasan Melnikov dikembangkan oleh Kovacic dan Wiggins (1992). Metode ini mempelajari suatu sistem yang diberi perturbasi dan merupakan sistem

Hamiltonian yang terintegralkan. Sistem juga memiliki set invarian yang hiperbolik secara normal, dimana manifold stabil dan tak-stabilnya beririsan secara transversal. Struktur dari sistem yang tidak terperturbasi adalah dua buah sistem Hamiltonian yang *uncoupled* dengan derajat kebebasan satu.

Geometri secara global yang berhubungan dengan struktur yang terintegralkan digunakan untuk membangun sistem koordinat yang kemudian digunakan untuk menentukan apakah sembarang orbit homoklinik pada set invarian bertahan terhadap perturbasi. Hasil dari analisis yang dilakukan pada sistem (4.2) diperoleh diagram parameter sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 4.6.



Gambar 4.5. Diagram parameter dari sistem (4.2) pada bidang (σ_1, σ_2) , untuk nilai-nilai $k_1 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ dan $k_2 = 1$.

Pada daerah diantara L_3 dan L_4 orbit Sinikov terdeteksi. Pada gambar di atas garis L_1 dan L_5 menunjukkan dimana solusi semi-trivial berbifurkasi ke solusi non-trivial. Garis L_2 adalah garis dimana bifurkasi Hopf dan solusi non-trivial muncul. Persamaan-persamaan garis di atas ditemukan secara eksplisit dari hasil analisis yang telah dilakukan.

5. Catatan dari Studi Sistem Autoparametrik yang Tereksitasi Sendiri

Berikut ini kajian hasil-hasil utama dari studi yang dilakukan Abadi (2001) untuk sistem autoparametrik yang memuat osilator tereksitasi sendiri. Misalkan sistem autoparametrik tipe Rayleigh berikut:

$$\begin{aligned} x'' - \beta(1 - x'^2)x' + x + \gamma_1 y^2 &= 0 \\ y'' + \kappa y' + q^2 y + \gamma_1 xy &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

dimana $\beta > 0$ adalah koefisien dari eksitasi sendiri (*self-excitation*), $\kappa > 0$ adalah koefisien dari sistem eksitasi, γ_1 dan γ_2 koefisien non-linear *coupling*, dan q adalah koefisien *tuning* yang menyatakan rasio dari frekuensi natural dari sistem linear dan tanpa *damping*. Sistem dipelajari di sekitar $q = \frac{1}{2}$ dan nilai-nilai parameter yang kecil. Setelah melakukan penskalaan kembali semua parameter dan memisalkan $q^2 = \frac{1}{4} + \varepsilon\sigma$, maka diperoleh sistem dalam bentuk standar berikut:

$$\begin{aligned} x'' + x &= \varepsilon(\beta(1 - x'^2)x' - \gamma_1 y^2) \\ y'' + \frac{1}{4}y &= -\varepsilon(\kappa y' + \sigma y + \gamma_2 xy) \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.1 Solusi Semi-trivial dan Kestabilannya

Solusi semitrivial berkaitan dengan kondisi $y = 0$, sehingga dari sistem (5.2) diperoleh persamaan Rayleigh

$$x'' + x = \varepsilon\beta(1 - x'^2)x', \quad y = 0 \quad (5.3)$$

dengan menggunakan metode Averaging persamaan (5.3) dianalisa, kemudian dengan memisalkan $x_0(\tau) = R_0 \cos(\tau + \psi_0)$ yang merupakan aproksimasi dari solusi periodik yang stabil dari persamaan (5.3) sampai dengan order- ε .

Untuk mempelajari kestabilan semi-trivial $x_0(\tau)$ pada sistem (5.2), digunakan sistem yang terperturbasi (sedikit/kecil) pada solusi. Dari hasil analisa diperoleh batas kestabilan yaitu:

$$q^2 = \frac{1}{4} + \varepsilon \sqrt{\frac{\gamma_2^2 R_0^2 - \kappa^2}{4}}$$

Pada $\kappa = \gamma_2 \sqrt{\frac{3}{4}}$ bifurkasi muncul, dimana solusi semitrivial berubah kestabilan dan solusi non-trivial muncul.

5.2 Analisis dari Solusi Periodik

Solusi non-trivial dipelajari dari bentuk normal sistem *averaging*. Sistem tersebut diperoleh setelah menggunakan transformasi polar sebagai berikut:

$$x = R_1 \cos(\tau + \psi_1) \text{ dan } y = R_2 \cos\left(\frac{1}{2}\tau + \psi_2\right).$$

Sistem averaging berikut diperoleh setelah memisalkan $\rho = R_2^2$, $u = R_1 \cos\phi$ dan $v = R_1 \sin\phi$.

$$\begin{aligned}
\rho' &= -\kappa\rho - \gamma_2\rho v \\
u' &= \frac{1}{2}\beta\left(1 - \frac{3}{4}R_1^2\right)u + \gamma_2uv + 2\sigma v \\
v' &= \frac{1}{2}\beta\left(1 - \frac{3}{4}R_1^2\right)v + \frac{1}{4}\gamma_1\rho - \gamma_2u^2 - 2\sigma u
\end{aligned} \tag{5.4}$$

dimana $R_1^2 = u^2 + v^2$. Sistem (5.4) invariant terhadap $(\rho, u, v) \rightarrow (\rho, -u, v)$ dan $\rho=0$ merupakan manifold invarian dari sistem. Titik tetap dari sistem (5.4) yang diperoleh dari $\rho' = 0, u' = 0$ dan $v' = 0$ berkorelasi dengan solusi periodik pada kasus resonan eksak ($\sigma = 0$) dan untuk dekat resonan ($\sigma \neq 0$).

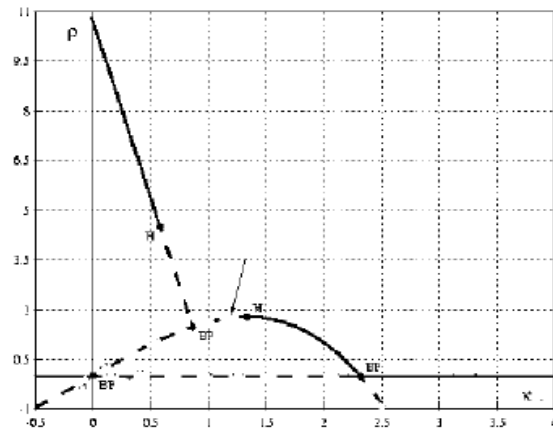
5.3 Simetri pada Resonan Eksak

Pada kasus resonan eksak dan nilai-nilai parameter $\beta > 0$, $\gamma_1 > 0$, dan $\gamma_2 > 0$, titik-titik tetap $\mathbf{x}_{00} = (\rho_0, u_0, v_0) = (0,0,0)$ (solusi trivial), $\mathbf{x}_{10} = \left(0,0, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ dan $\mathbf{x}_{10} = \left(0,0, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ (solusi-solusi semi-trivial) diperoleh dengan menyelesaikan $\rho' = 0, u' = 0$, dan $v' = 0$. Selain titik-titik tetap tersebut ditemukan pula titik-titik tetap yang berkorespondensi dengan solusi periodik non-trivial, yaitu:

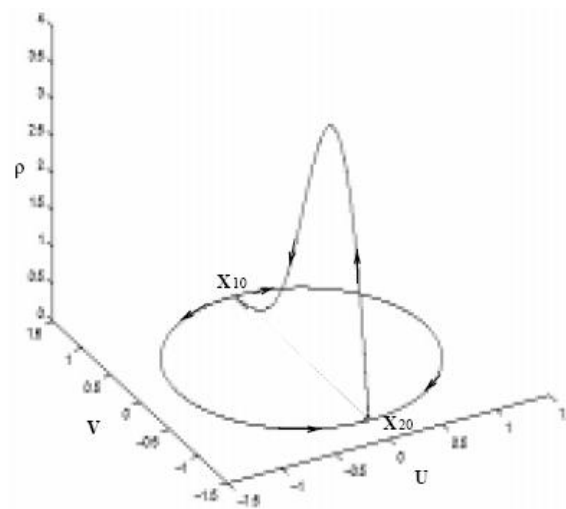
$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \left(\frac{2\beta\kappa}{\gamma_1\gamma_2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\kappa^2}{\gamma_2^2}\right)0, -\frac{\kappa}{\gamma_2}\right) \\
\mathbf{x}_2 &= \left(\frac{16\gamma_2}{3\gamma_1}\left(1 - 2\frac{\kappa}{\beta}\right)0, \pm\sqrt{\frac{4}{3}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\kappa^2}{\gamma_2^2}\right) - \frac{8\kappa}{3\beta}}, -\frac{\kappa}{\gamma_2}\right)
\end{aligned}$$

Analisis linear pada setiap titik-titik kritis di atas digunakan untuk menentukan kestabilan dari solusi-solusi sistem (5.4). Dengan mengubah-ubah nilai κ , yaitu koefisien *damping* dari sistem terseksitasi (*excited system*), ditemukan pola bifurkasi yang berbeda sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 5.1.

Pada Gambar 5.1, ditemukan interval parameter (ditunjukkan dengan tanda panah) dimana solusi semi-trivial dan solusi non-trivial sistem (5.4) keduanya tak-stabil. Pada interval tersebut, dengan menggerakkan nilai κ (pada interval yang cukup pendek) ditemukan bifurkasi Hopf, untuk kemudian muncul sebuah *limit cycle* yang stabil. Untuk kemudian *limit cycle* tersebut pecah muncul sebuah *robust heteroclinic cycle yang stabil*, lihat Krupa (1997). Gambar 5.2 memperlihatkan suatu *cycle* pada ruang fase dimensi-3 (ρ, u, v) .



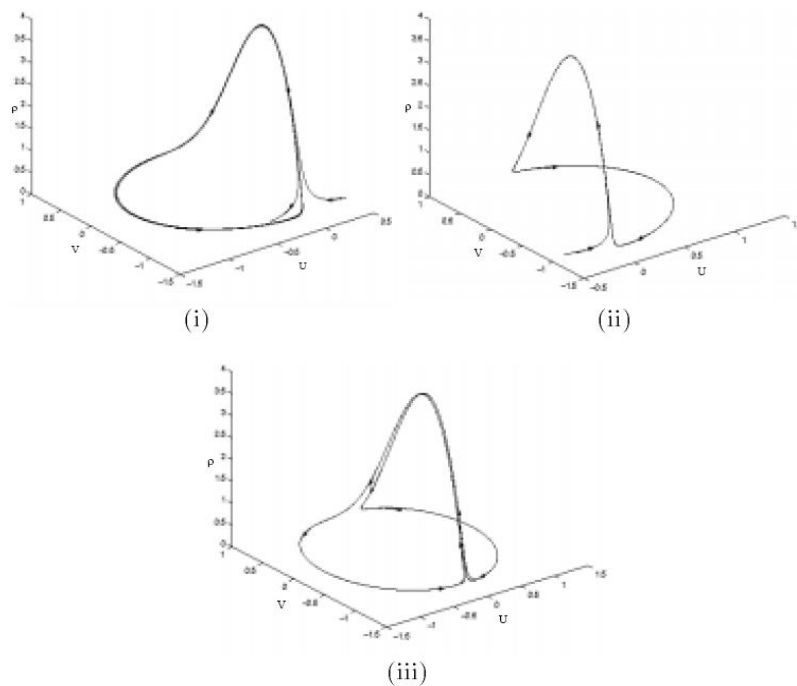
Gambar 5.1. Resonan Eksak. Diagram bifurkasi sistem (5.4) merupakan proyeksi pada bidang (κ, ρ) untuk nilai $\beta = 2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2$. Titik BP menunjukkan titik percabangan dan H adalah titik Hopf.



Gambar 5.2. *Robust heteroclinic cycle* menghubungkan titik-titik sadle x_{10} dan x_{20}

5.4 Pecahnya Simetri pada Resonan tak-eksak

Pada kasus resonan tak-eksak ($\sigma \neq 0$), sistem menunjukkan fenomena yang menarik yaitu pecahnya simetri terhadap $u = 0$, pada saat nilai σ dekat ke 0. Ilustrasi fenomena ini digambarkan pada Gambar 5.3.



Gambar 5.3. Pecahnya simetri. (i) Orbit periodik-panjang untuk $\sigma = 0,01$, (ii) Orbit periodik-panjang untuk $\sigma = -0,01$, (iii) Kombinasi dari (i) dan (ii).

6. Penutup

Kajian Fatimah dan Abadi masing-masing menunjukkan hasil yang secara kualitatif berbeda, dimana masing-masing sistem yang dipelajari memiliki dinamik yang kompleks dan menarik. Pada kajian sistem autoparametrik yang tereksitasi secara parametrik ditemukan fenomena munculnya struktur *strange attractor* yang diawali dengan ditemukannya *periodic doubling*. Struktur tersebut teridentifikasi menyebabkan solusi *chaotic* pada sistem. Studi analitik dan numerik mengenai dinamik dari sistem tersebut dilakukan dengan mendalam. Adapun kajian tentang sistem autoparametrik yang tereksitasi secara sendiri menunjukkan adanya kasus resonan: resonan eksak dan resonan tak-eksak. Pada kasus resonan eksak ditemukan adanya *limit cycle* pada sistem yang kemudian pecah dan disusul dengan kemunculan sebuah *robust heteroclinic cycle yang stabil*. Adapun pada kasus resonan tak-eksak ditemukan pecahnya kesimetrian (*symmetry breaking*) solusi.

Daftar Pustaka

- Abadi. 2001. On Self-excited Auto-Parametric System. *Nonlinear Dynamics* 24, pp.147-166.
- Cartwright, M.L., dan Littlewood, J.E. 1945. On Non-linear Differential equations of the Second Order. *Bulletin London Math. Soc*, (20), p.180-189.

- Chow, S.N., Hale, J.K. 1982. *Methods of Bifurcation Theory*, *Appl.math.sciences*. New York: Springer-Verlag.
- Fatimah, S. 2001. Global Bifurcations and Chaotic Solution in an Autoparametric System in 1:1 Internal Resonance with Parametric Excitation. [Pre-print] The Netherlands: Utrecht University.
- Fatimah, S. 2002. Bifurcations in Dynamical Systems with Parametric Excitation. [Disertasi]. The Netherlands: Utrecht University.
- Fatimah, S. dan Ruijgrok, M. 2002. Bifurcation in an Autoparametric System in 1:1 Internal Resonance with Parametric Excitation. *International Journal of Non-linear Mechanic*, vol.3.7, pp. 297-308.
- Guckenheimer, J.M dan Holmes, P.J. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, *Appl.math Sciences*. New York: Springer-Verlag.
- Hartman, P. 2002. *Ordinary Differential Equations*. New York: Willey.
- Iooss, G., dan Adelmeyer, M. 1992. *Topics in Bifurcation Theory*. Singapore: World Scientific.
- Kovacic, G., dan Wiggins, S. 1992. Orbit Homoclinis to Resonances, with an Application to Chaos in a Model of the Force and damped Sine-Gordon Equation. *Physica D*, 57, pp.185-225.
- Krupa, M. 1997. Robust Heteroclinic Cycles. *J. Nonlinear Science* 7, pp. 129-176.
- Kuznetsov. 1998. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag.
- Ruijgrok, M., Tondl, A., dan Verhulst, F. 1993. Resonance in a rigid rotor with elastic support. *ZAMM*, Vol. 73, pp. 255-263.
- Sanders, J.A, dan Verhulst, F. 1985. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, *Appl. Math. Sciences* 59. New York: Springer-Verlag.
- Thompson, J.M.T., Stewart, H.B. 2000. *Nonlinear Dynamics and Chaos*, sec. edition. England: John wiley and Sons, Ltd.
- Tondl, A., dan Nabergoj, R. 1993. Autoparametric System. [pre-print] Italy: University of Trieste.
- Tondl, A., Koteck, V., dan Kratochvil, C. 2001. *Vibration Quenching of Pendulum Type System by Means of Absorbers*. Czech Republic: CERM akademické nakladatelství, s.r.o., Brno.
- Tondl, et al. 2000. *Autoparametric Resonance in Mechanical Systems*. Cambridge University Press.

- Verhulst, F. 2006. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd Edition. New York: Springer-Verlag.
- Wiggins, S. 1988. *Global Bifurcation and Chaos, Appl.math.* New York: Springer-Verlag.
- Wiggins, S. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag.