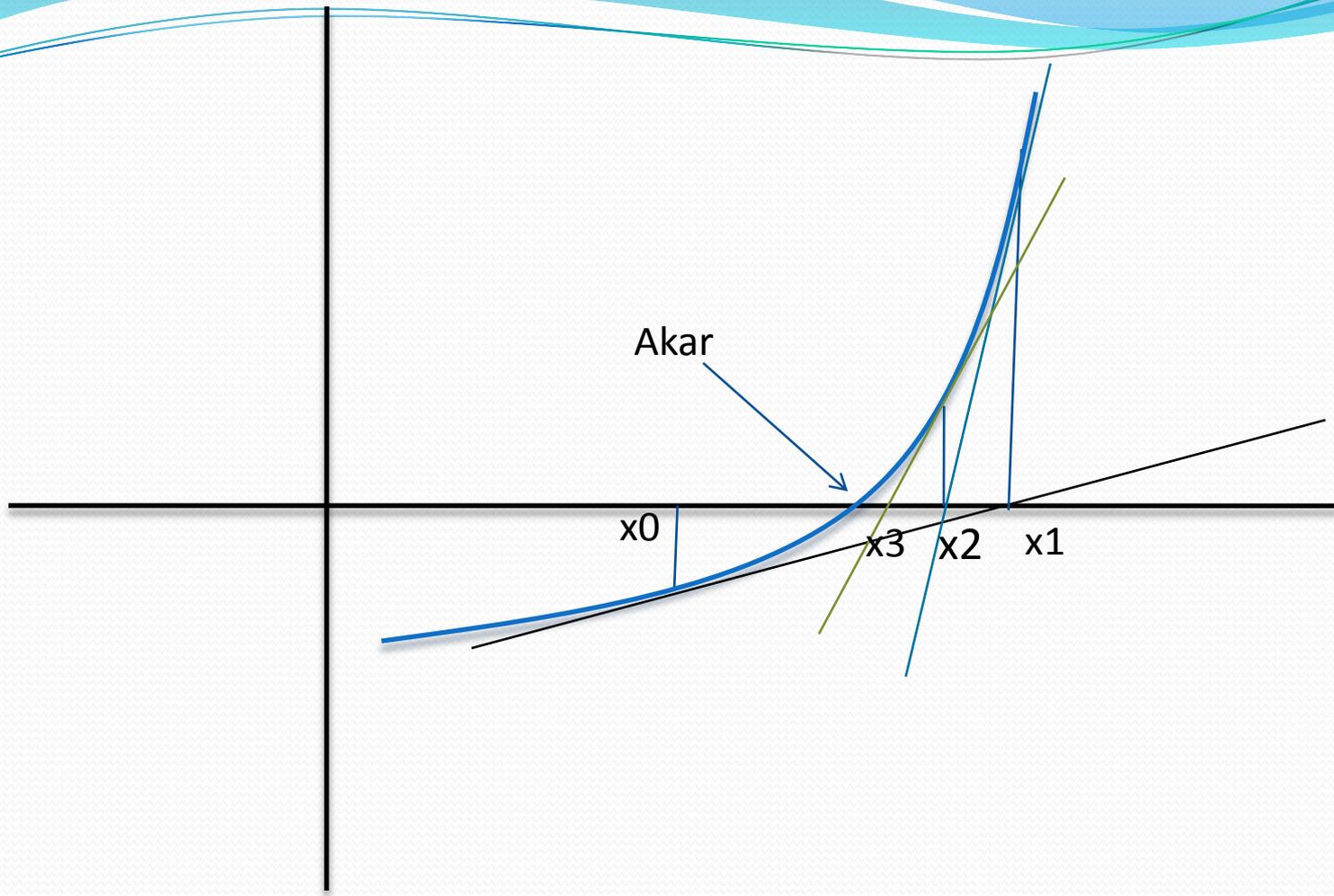


Metode Newton-Raphson

Misal diketahui suatu fungsi f yang terderensialkan pada suatu selang yang memuat akar. Ambil sebarang nilai awal x_0 . Karena f terderensial di x_0 , maka f mempunyai garis singgung di x_0 . Asumsikan bahwa gradiennya tidak sama dengan 0. Akibatnya garis singgung tersebut akan memotong sumbu x , sebut di x_1 . Dengan cara yang sama, f di x_1 juga mempunyai garis singgung yang tidak nol, sehingga garis singgung tersebut akan memotong sumbu x di x_2 . Proses berlanjut sehingga titik potong-titik potong tersebut akan konvergen ke akar f .



Perhatikan bahwa

$$f'(x_0) = \frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Dengan cara yang sama diperoleh:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Secara umum diperoleh model iterasi N-R sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \text{ dengan } f'(x_i) \neq 0$$

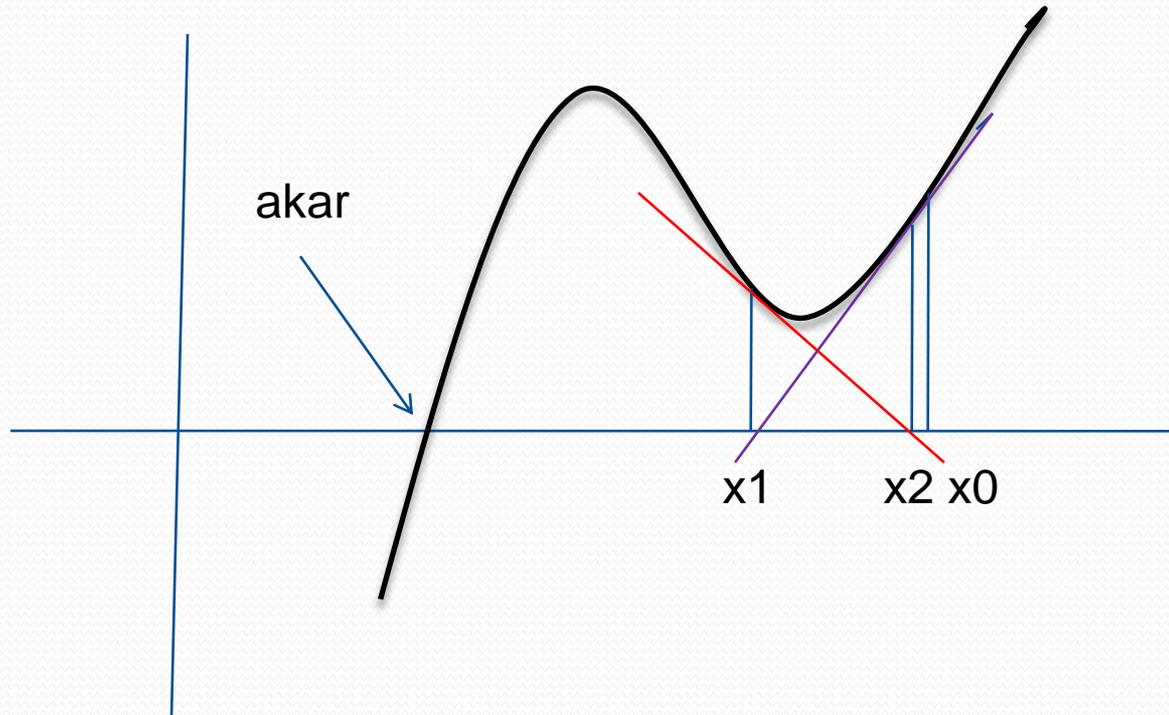
Proses iterasi berhenti, bila:

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

Atau

$$\left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| < e$$

Perhatikan grafik berikut:



Proses iterasi akan divergen beresilasi.

Agar metode N-R konvergen, maka harus dipenuhi syarat sbb:

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1, \text{ dengan } f'(x) \neq 0$$

Perhatikan kembali model iterasi titik tetap sebagai berikut:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Misalkan

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{[f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)]}{[f'(x)]^2} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh syarat konvergensi metode N-R adalah :

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1$$

Contoh :

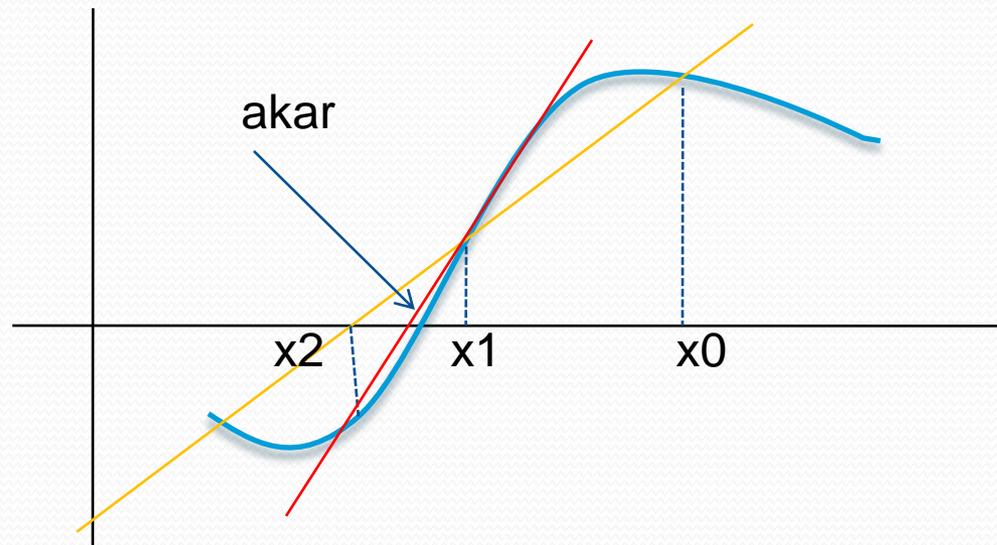
Lakukan 6 langkah iterasi metode N-R untuk menghampiri salah akar dari persamaan :

$$f(x) = e^x - 4x$$

Hitung juga kesalahan relatif dari akar aproksimasi yang diperoleh!

Metode Secant

Pada metode Newton-Raphson diperlukan perhitungan turunan fungsi f , f' . Turunan tersebut dapat dihilangkan dengan cara menggantinya dengan bentuk yang *ekuivalen*, yakni gradien tali busur. Perhatikan gambar berikut:



Misalkan diberikan dua nilai awal, sebut x_0 dan x_1 . Karena f kontinu, maka f_0 dan f_1 pasti ada. Kemudian dibuat tali busur yang menghubungkan titik (x_0, f_0) dan (x_1, f_1) .

Jika diasumsikan gradiennya tidak nol, maka talibusur tersebut akan memotong sumbu x, katakan di x_2 . Karena f kontinu, maka f_2 pasti ada. Kemudian dibuat talibusur yang menghubungkan (x_1, f_1) dan (x_2, f_2) , yang memotong sumbu x di x_3 , proses berlanjut dan pada akhirnya titik potong talibusur dengan sumbu x akan konvergen ke akar.

Pandang model iterasi N-R

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \text{ dengan } f'(x_i) \neq 0$$

Jika

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Maka diperoleh model iterasi secant sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Proses iterasi berhenti , jika :

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon \quad \text{atau} \quad \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| < e$$

Contoh :

Lakukan 6 langkah iterasi metode secant untuk menghampiri akar dari persamaan :

$$f(x) = e^x - 4x$$

Hitung juga kesalahan relatif dari akar aproksimasi yang diperoleh!