KARAKTERISTIK DISTRIBUSI KELUARGA

TRANSFORMASI KHI-KUADRAT

Oleh :

Entit Puspita

Dosen Jurusan pendidikan Matematika

FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia

Abstrak

Dalam Keluarga eksponensial satu parameter dengan fungsi kepadatan peluang (fkp) $f(x, \theta) = \exp\{a(x)b(\theta) + c(\theta) + h(x)\}$ berdistribusi Gama $(k/2, 1/2)$ jika dan hanya jika $2c'(\theta)b(\theta)/b'(\theta) = k$, k positif dan independen dengan θ . Jika k bulat $-2 \sum_{i=1}^n a(x_i)b(\theta)$ berdistribusi Khi-Kuadrat sentral dengan derajat bebas nk . Selanjutnya akan dikaji lebih lanjut karakteristik dari distribusi keluarga transformasi Khi-Kuadrat.

Kata kunci: Khi-Kuadrat sentral, keluarga transformasi Khi-Kuadrat. [Type equation here.](#)

1. Pendahuluan

1.1. Keluarga Eksponensial satu Parameter

Keluarga densitas disebut keluarga eksponensial k parameter jika fkp-nya dapat dinyatakan sebagai:

$$f(x, \theta) = \exp\theta\{\sum_{i=1}^k a(x_i)b_i(\theta) + c(\theta) + h(x)\}$$

Dengan $b_i(\theta)$ adalah fungsi kontinu tak trivial dari θ . Pada makalah ini akan diselidiki kasus khusus dari keluarga eksponensial satu parameter.

1.2. Distribusi Khi-Kuadrat Sentral

Distribusi Khi-Kuadrat sentral didefinisikan sebagai distribusi dari jumlah kuadrat variable random independen yang berdistribusi norma standar.

2. Distribusi Keluarga Transformasi Khi-Kuadrat

Misalkan variable kontinu yang mempunyai fkp:

$$f(x, \theta) = \exp\{a(x)b(\theta) + c(\theta) + h(x)\} \tag{1}$$

Maka di bawah kondisi tertentu akan merupakan sebuah distribusi Khi-Kuadrat sentral dengan derajat bebas tertentu. Hasil ini akan dibuktikan pada teorema berikut:

Teorema 2.1

Di dalam keluarga eksponensial satu parameter dari bentuk (1), $-2a(x)b(\theta)$ adalah berdistribusi Gama dengan parameter $k/2$ dan $1/2$ jika dan hanya jika $2c'(\theta)b(\theta)/b'(\theta) = k$ dengan k positif dan bebas dari bentuk θ . Untuk kasus k bulat maka $-2a(x)b(\theta)$ adalah berdistribusi Khi-Kuadrat sentral dengan derajat at bebas k .

Bukti

$$\rightarrow \text{Diketahui } 2c'(\theta)b(\theta)/b'(\theta) = k \quad (2)$$

Karena $f(x, \theta) = \exp\{a(x)b(\theta) + c(\theta) + h(x)\}$ adalah fkp maka:

$$\int f(x, \theta) = \exp\{a(x)b(\theta) + c(\theta) + h(x)\} dx = 1$$

$$\int f(x, \theta) = \exp\{a(x)b(\theta) + h(x)\} dx = \exp\{-c(\theta)\} \quad (3)$$

$$\text{Dari (2) } c'(\theta) = kb'(\theta)/2b(\theta)$$

Jika kedua sisi diintegrasikan maka diperoleh:

$$\int c'(\theta) d\theta = \int kb'(\theta)/2b(\theta) d\theta$$

$$c(\theta) = 1/2 \cdot k \ln b(\theta) + k_1$$

dengan k_1 adalah konstanta integrasi

Akibatnya (3) menjadi:

$$\int f(x, \theta) = \exp\{a(x)b(\theta) + h(x)\} dx = \exp\{-1/2 \cdot k \ln b(\theta) - k_1\} \quad (4)$$

Selanjutnya akan diperlihatkan distribusi dari $u = -2a(x)b(\theta)$, fungsi karakteristik dari u diberikan oleh:

$$\varphi_u(t) = E(\exp\{-2ita(x)B(\theta)\})$$

$$= \int \exp\{-2ita(x)B(\theta)\} \cdot \exp\{a(x)b(\theta) + c(\theta) + h(x)\} dx$$

$$= \int \exp\{c(\theta)\} \exp\{a(x)b(\theta)(1 - 2it) + h(x)\} dx$$

Dari (4) diperoleh:

$$\varphi_u(t) = \exp\{c(\theta)\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2k} \cdot \ln[b(\theta)(1 - 2it)] - k_1\right\} dx$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2k} \cdot \ln b(\theta) + k_1\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2k} \cdot \ln b(\theta) - \frac{1}{2k} \cdot \ln(1 - 2it) - k_1\right\}$$

$$= \exp\{\ln(1 - 2it)^{-\frac{k}{2}}\}$$

$$= (1 - 2it)^{-k/2} \quad (5)$$

Ini merupakan fungsi karakteristik dari distribusi Gama dengan parameter $k/2$ dan $1/2$, sebuah fungsi karakteristik yang dengan khusus menunjukkan bahwa $-2a(x)b(\theta)$ berdistribusi Gama dengan parameter $k/2$ dan $1/2$.

$\rightarrow$ Diketahui $-2a(x)b(\theta)$ adalah variable random dari distribusi Gama dengan parameter $k/2$ dan $1/2$.

Misalkan : $y = -2a(x)b(\theta)$, maka fkp dari y adalah:

$$f(y) = \frac{\exp\left(-\frac{y}{2}\right)y^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
f(a(x)) &= \frac{[\exp\{a(x)b(\theta)\}][-2b(\theta)][-2a(x)b(\theta)]^{k/2}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \\
&= \frac{[\exp\{a(x)b(\theta)\}][-b(\theta)]^{\frac{k}{2}}[a(x)]^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \\
&= \exp\left\{a(x)b(\theta) + \frac{k}{2}\ln 9 - b(\theta)0 + \left(\frac{k}{2} - 1\right)\ln a(x) - \ln\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right\} \quad (7)
\end{aligned}$$

Ini adalah bentuk (1), akibatnya distribusi dari variable random X termasuk ke dalam ke dalam keluarga kspensial dengan:

$$c(\theta) = \frac{k}{2} \ln\{-b(\theta)\} \text{ atau } 2c'(\theta)b(\theta)/b'(\theta) \quad (8)$$

Jika k bulat, maka $-2a(x)b(\theta)$ adalah distribusi Khi-Kuadrat dengan derajat bebas k.

Definisi 2.2

Sebuah kelas khusus dari keluarga eksponensial satu parameter yang mempunyai fkp (1) dan memenuhi (2), disebut distribusi keluarga transformasi Khi-kuadrat dengan syarat k adalah bulat positif.

Normal, Log Normal, Gama, Eksponensial, Rayleig, Pareto, Weibull, Maxwell, Inverse Gaussian adalah distribusi-distribusi yang termasuk ke dalam keluarga Transformasi Khi-Kuadrat. Bagaimanapun tidak semua distribusi kontinu yang termasuk ke dalam keluarga eksponensial satu parameter merupakan keluargaoh berikut:

Contoh 2.1

Misalkan variable random X mempunyai fkp :

$$f(x) = \theta k^{-\theta} x^{\theta}, \quad k > X > 0 \text{ dan } \theta > 0$$

K diketahui

Jelas distribusi dari variable random X termasuk keluarga eksponensial satu parameter dengan $a(x) = \ln x$, $b(\theta) = \theta - 1$ dan $c(\theta) = \ln \theta - \theta \ln k$. Sehingga $2c'(\theta)b(\theta)/b'(\theta) = 2(1-\theta)(1-\ln k)$ merupakan fungsi dari θ , oleh karena itu distribusi dari variable random X tidak termasuk ke dalam keluarga transformasi Khi-Kuadrat.

Berikut ini disajikan sebuah contoh dari distribusi yang sudah kita kenal, yaitu distribusi normal dengan penekanan parameter yang berbeda.

Contoh 2.2

Perlihatkan manakah distribusi berikut yang termasuk ke dalam keluarga transformasi Khi-Kuadrat.

- a. Distribusi Normal $(\theta, 1)$
- b. Distribusi Normal $(0, \theta^2)$

Penyelesaian:

a. $X \sim N(\theta, 1)$

Maka fkp dari variable random tersebut adalah:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}(x - \theta)^2 \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2}x^2 + \theta x - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\ln 2\pi \right\} \end{aligned}$$

Ini merupakan keluarga eksponensial dengan:

$$a(x) = x, b(\theta) = \theta \text{ dan } c(\theta) = -1/2 \theta^2$$

Sehingga:

$$\frac{2c'(\theta)b(\theta)}{b'(\theta)} = 2\theta^2, \text{ ternyata ini merupakan fungsi dari } \theta \text{ jadi tidak independen dengan } \theta. \text{ Oleh}$$

karena itu distribusi normal dengan mean θ dan variansi 1 tidak termasuk ke dalam

keluarga transformasi Khi-Kuadrat.

b. $X \sim N(0, \theta^2)$

Fkp dari variable random X adalah:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta} \exp -\frac{1}{2\theta^2} x^2 \\ &= \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\theta^2} - \ln\theta - \frac{1}{2}\ln 2\pi \right\} \end{aligned}$$

Ini merupakan fkp dari keluarga eksponensial dengan $a(x) = x$, $b(\theta) = -1/2\theta^2$ dan $c(\theta) = -\ln \theta$.

Sehingga:

$$\frac{2c'(\theta)b(\theta)}{b'(\theta)} = 1 \text{ ternyata merupakan bilangan bulat positif dan bebas dari } \theta, \text{ ini berarti}$$

distribusi normal dengan mean 0 dan variansi θ^2 termasuk ke dalam keluarga transformasi Khi-Kuadrat.

Dari contoh terakhir dapat ditunjukkan bahwa untuk distribusi yang sama, tetapi dengan penekanan pada parameter yang berbeda memberikan hasil yang berbeda. Jadi distribusi normal yang termasuk ke dalam distribusi keluarga transformasi Khi-Kuadrat adalah distribusi normal dengan mean nol dan variansi θ^2 .

3. Daftar Pustaka

Barndorf-Nielson, O. (1978). *Information end Exponential Family in Statistical Theory*. Jhon Wiley & Sons. New York

Dudewicz, E. J. (1988). *Modern Mathematical Statistics*. Jhon Willey & Sons. Singapore.

Rahman, M. S and Gupta, R. P. (1993). *Family of Transformed Chi-Square Distributions*. Commun Statist-Theory Meth. 22. 135 – 146.