MODEL GARCH UNTUK VARIANSI SESATAN DARI MODEL AUTOREGRESIVE MOVING AVERAGE

Oleh:
Entit puspita
Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI
Jl Dr. Seiabudhi 229, Bandung 40154

Abstak

Model yang digunakan dalam pemodelan data runtun waktu yaitu model Autoregresive Moving Average (ARMA) biasanya mengasumsikan bahwa variansi sesatan dari model adalah konstan. Pada kenyatannya di lapangan sering sekali dijumpai data-data runtun waktu yang memiliki variansi sesatan tidak konstan, diantaranya data dari harga rata-rata laju inplasi. Jika diketahui secara pasti bahwa data runtun waktu memiliki variansi sesatan tidak konstan kemudian dipaksakan menggunakan model ARMA, maka akan diperoleh nilai ramalan dengan selang kepercayaan yang lebar dan bias. Berdasarkan hal tersebut, perlu kiranya memodelkan variansi sesatan yang diperoleh dari model ARMA. Model yang digunakan untuk variansi sesatan tersebut adalah model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic (GARCH).*

Kata kunci : *Model ARMA, Model GARCH, Heteroskedastic*

1. Model *Autoregresive Moving Average*

Suatu runtun waktu adalah susunan observasi berurut menurut waktu, yang dinyatakan oleh Z_1, Z_2, …, Z_n. Metode yang digunakan untuk menentukan model yang sesuai untuk data runtun waktu adalah metode Box-Jenkins, model tersebut dikenal dengan model *Autoregresive Moving Average* (ARMA) untuk data stasioner dan ARIMA untuk data tidak stasioner.Pada makalah ini hanya akan difokuskan pada data stasioner, sehingga model yang digunakan adalah model ARMA yang termasuk ke dalam runtun waktu linier.

Secara umum model *Autoregresive Moving Average orede* p dan q, dinotasikan dengan ARMA(p,q), dengan bentuk umum:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + ... + \phi_p Z_{t-p} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + ... + \theta_q a_{t-q}$$

Sedangkan model *Autoregresive* orde p, dinotasikan oleh AR(p), memiliki bentuk umum:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + ... + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

dan model *Moving average* orde q dinotasikan oleh MA(q), memiliki bentuk umum :

$$Z_t = a_t + \theta_1 a_{t-1} + ... + \theta_q a_{t-q}$$

dengan asumsi a_t berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi σ^2_a konstan.

Bagaimana model ARMA di identifikasi untuk menentukan representasi yang memadai suatu proses yang dimanipestasikan oleh runtun waktu Z_1, Z_2, …, Z_n. Kita hitung rata-rata, variansi, fungsi autokorelasi (fak (r_k)),dan fungsi autokorelasi parsial (fakp Φ_{kk}) untuk berbagai lag k. Pedoman untuk pengamatan ini disajikan pada table berikut:

$\hat{\phi}_{kk} \sim N(0, \frac{1}{N}); k > p$	AR(p)
$r_k \sim N(0, \frac{1}{N}(1 + 2\sum_{i=1}^{q} r_i^{\,2})); k > q$	MA(q)
Baik $\hat{\phi}_{kk}$ maupun r_k tidak terputus	ARMA(p,q)

Perlu diingat bahwa fak dan fakp hanya merupakan petunjuk umum saja, oleh karena itu beberapa model mungkin kita coba , untuk diidentifikasi lebih lanjut. Jika ada alasan yang cukup untuk mengira bahwa $E(Z_t) \neq 0$, maka setiap model harus ditulis dengan $\tilde{Z}_t = Z_t - \bar{Z}$ dan bukannnya Z_t.

Setelah beberapa model direkomendasikan untuk diperiksa, langkah selanjutnya adalah menentukan estimasi untuk setiap parameter dari model – model tersebut. Dilanjutkan dengan verifikasi model dengan uji kecocokan untuk menentukan model mana yang paling sesuai untuk data runtun waktu yang ada, model tersebut selanjutnya digunakan untuk peramalan.

2. Model Runtun Waktu Nonlinier

Untuk memahami runtun waktu nonlinier, perlu dicatat bahwa ramalan bersyarat adalah lebih baik dibandingkan dengan ramalan tak bersyarat. Misalkan kita telah dapatkan model ARMA yaitu $Z_t = \Phi Z_{t-1} + a_t$, ramalan Z_{t+1} adalah:

$$E(Z_{t+1}|Z_t, Z_{t-1}, \dots , Z_1) = \Phi Z_t$$

Jika digunakan rata-rata bersyarat untuk meramal Z_{t+1}, maka ramalan variansinya adalah $E[(Z_{t+1} - \Phi Z_t)^2] = E(a^2_{t+1}) = \sigma^2_a$. Sementara itu, jika ramalan tidak bersyarat digunakan, maka ramalan tidak bersyarat dari barisan $\{Z_t\}$ adalah μ. Ramalan tidak bersyarat dari variansi adalah :

$$\mathrm{Var}(Z_{t+1}|Z_t, Z_{t-1}, \dots , Z_1) = \mathrm{Var}(\Phi Z_t + a_{t+1}| Z_t, Z_{t-1}, \dots , Z_1)$$

$$= \frac{\sigma^2{}_a}{1-\phi^2}$$

karena $\frac{1}{1-\phi^2} > 1$, maka peramalan tidak bersyarat mempunyai varaiansi lebih besar daripada peramalan bersyarat..

Jika variansi $\{a_t\}$ tidak konstan, kita dapat menaksir kecenderungan variansi dari suatu model ARMA(1,0). Sebagai contoh misalkan $\{a_t\}$menyatakan estimasi sesatan model $Z_t = \Phi Z_{t-1} + a_t$, sedemikian sehingga variansi bersyarat dari Z_{t+1} adalah:

$$\mathrm{Var}(Z_{t+1}|Z_t, Z_{t-1}, \dots , Z_1) = E[(Z_{t+1} - \Phi Z_t)^2] = E(a^2_{t+1}) \tag{1}$$

Sejauh ini kita sudah menetapkan bahwa $E(a^2_{t+1})$ sama dengan σ^2_a., sekarang misalkan bahwa variansi bersyarat tidak konstan, satu strategi sederhana untuk model variansi yang bersyarat dari proses AR(1) dengan menggunakan kuadrat dari estimasi sesatan:

$$\hat{a}^2{}_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{a}_{t-1} + \ldots + \alpha_q \hat{a}_{t-q} + v_t \tag{2}$$

dengan v_t merupakan proses *white Noise*.

Jika nilai-nilai α_1, α_2, …, α_q semuanya sama dengan nol, maka estimasi variansi adalah konstan, sama dengan α_0. Jika variansi bersyarat meningkat sesuai dengan proses yang diberikan oleh (2) meka kita dapat menggunakan persamaan tersebut untuk meramalkan variansi bersyarat pata t + 1 yaitu:

$$E(\hat{a}^2{}_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{a}_{t-1} + \ldots + \alpha_q \hat{a}_{t-q}$$

Karena alasan ini persamaan (2) dinamakan model *Autoregresive conditional hetersoskedastic(ARCH).*

3. Model *Autoregresive Conditional Heteroskedastic*

Model ini diperkenalkan oleh Engle (1982) untuk menjelaskan persgerakan nilai inflasi. Secara umum model *Autoregresive conditional hetersoskedastic* orde q (*ARCH(q)*) didefinisikan sebagai proses $\{a_t\}$ yang memenuhi : $a_t = v_t \sqrt{h_t}$, dimana :

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 a^2{}_{t-1} + \ldots + \alpha_q a^2{}_{t-q}$$

a_t = nilai sesatan ke-t yang diperolah dari model ARMA
v_t = nilai sesatan ke-t dari model

dengan asumsi:

i. v_t dan $\sqrt{h_t}$ independent untuk setiap t

ii. $v_t \sim N(0,1)$

Beberapa sifat dari ARCH(q)

i. $E(a_t | a_{t-1}, a_{t-2}, \ldots, a_{t-q}) = 0$

ii. $Var(a_t | a_{t-1}, a_{t-2}, \ldots, a_{t-q}) = Var(v_t \sqrt{h_t} | a_{t-1}, \ldots, a_{t-q}) = h_t$

Berdasarkan sifat tersebut dapat disimpulkan bahwa

$(a_t | a_{t-1}, a_{t-2}, \ldots, a_{t-q}) \sim N(0, h_t)$, untuk menjamin variansiproses ARCH(q) nonegatif, parameter-parameternya harus memenuhi $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, I = 1, 2, 3 …, q.

4. Model *Generalized Autoregresive Conditional Heteroskedaritic*

Model yang lebih umum dari ARCH adalah *Generalized Autoregresive Conditional Heteroskedaritic* (p,q) yang dikembangkan oleh Bollerslev (1986), model ini didefinisikan sebagai:

$a_t = v_t \sqrt{h_t}$ dimana

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 a^2{}_{t-1} + \ldots + \alpha_q a^2{}_{t-q} + \gamma_1 h_{t-1} + \gamma_2 h_{t-2} + \ldots + \gamma_p h_{t-p}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i\, a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \gamma_j h_{t-j}$$

dengan asumsi:

i. v_t dan $\sqrt{h_t}$ independent untuk setiap t

ii. $v_t \sim N(0,1)$

Beberapa sifat model GARCH(p,q)

i. $E(a_t | a_{t-1}, a_{t-2}, \ldots, a_{t-q}, h_{t-1}, \ldots, h_{t-p}) = 0$

ii. $Var(a_t | a_{t-1}, a_{t-2}, \ldots, a_{t-q}, h_{t-1}, \ldots, h_{t-p}) = h_t$

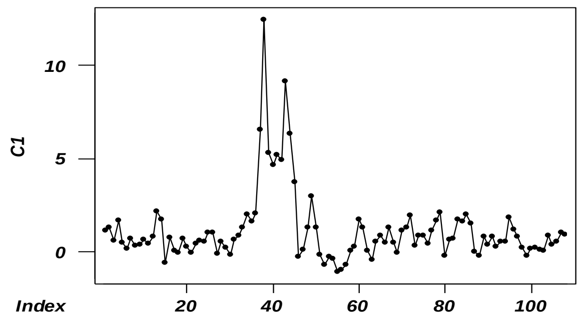
Sehingga dapat disimpulkan bahwa

$(a_t | a_{t-1}, a_{t-2}, \ldots, a_{t-q}, h_{t-1}, \ldots, h_{t-p}) \sim N(0, h_t)$

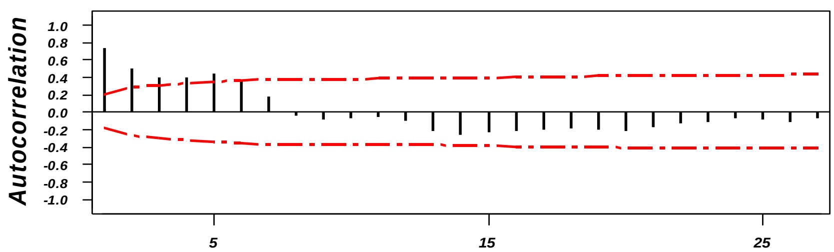
untuk menjamin variansi proses GARCH(p,q) nonnegatif, parameter-parameternya harus memenuhi $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, I = 1, 2, 3 …, q, $\gamma_j \geq 0$, j = 1, 2, …, p.

4. Contoh Kasus

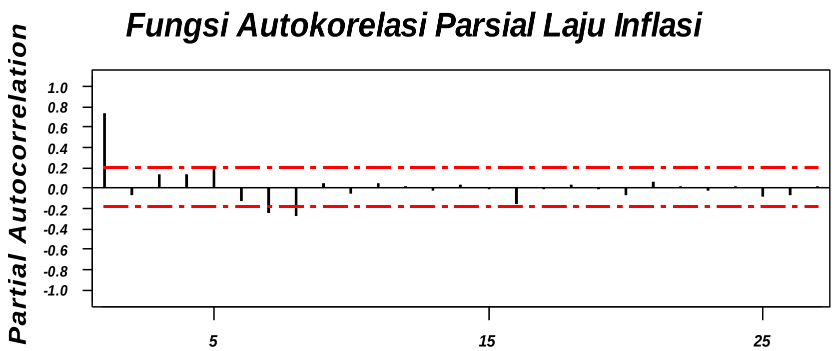
Sebagai contoh aplikasi dari model GARCH (p,q), berikut ini disajikan langkah-langkah penentuan model untuk data runtun waktu laju inflasi yang diperolah dari Badan Pusat Statistik (BPS) Jakarta, dari bulan Januari 1999 sampai dengan Desember 2003. Plot data, fungsi Autokorelasi dan fungsi Autokorelasi Parsial disajikan dibawah ini:



Fungsi Autokorelasi laju inflasi



Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ
1	0.73	7.58	59.03	8	-0.05	-0.24	164.79	15	-0.24	-1.19	189.91	22	-0.13	-0.60	225.77
2	0.50	3.61	87.00	9	-0.09	-0.47	165.75	16	-0.22	-1.11	196.28	23	-0.11	-0.53	227.54
3	0.40	2.62	105.36	10	-0.08	-0.39	166.44	17	-0.20	-1.01	201.76	24	-0.08	-0.36	228.35
4	0.39	2.41	123.02	11	-0.06	-0.32	166.90	18	-0.19	-0.95	206.77	25	-0.09	-0.44	229.59
5	0.44	2.57	145.57	12	-0.10	-0.53	168.15	19	-0.21	-1.02	212.66	26	-0.11	-0.53	231.45
6	0.37	2.01	161.18	13	-0.22	-1.14	174.08	20	-0.22	-1.08	219.41	27	-0.08	-0.38	232.40
7	0.17	0.89	164.53	14	-0.26	-1.36	182.83	21	-0.17	-0.83	223.51				



Lag	PAC	T	Lag	PAC	T	Lag	PAC	T	Lag	PAC	T
1	0.73	7.58	8	-0.27	-2.83	15	-0.02	-0.18	22	0.02	0.21
2	-0.07	-0.71	9	0.05	0.52	16	-0.16	-1.62	23	-0.03	-0.35
3	0.14	1.42	10	-0.06	-0.64	17	-0.01	-0.12	24	0.02	0.16
4	0.14	1.44	11	0.04	0.44	18	0.03	0.29	25	-0.09	-0.95
5	0.19	1.98	12	0.02	0.22	19	-0.01	-0.10	26	-0.08	-0.79
6	-0.14	-1.41	13	-0.03	-0.33	20	-0.07	-0.73	27	0.01	0.12
7	-0.24	-2.53	14	0.03	0.33	21	0.06	0.58			

Berdasarkan tingkah gerak dari fak dan fakp data laju inflasi di atas beberpa model yang disarankan untuk diidentifikasi adalah: ARMA(1,0), ARMA(1,1), ARMA(1,2), ARMA(1,3), ARMA(0,1), ARMA(0,2) dan ARMA(0,3). Setelah dilakukan estimasi parameter untuk setiap parameter pada model dilanjutkan dengan verifikasi (uji kecocokan) untuk berbagai model, ternyata model ARMA(0,3) yang paling sesuai dengan data runtun waktu yang ada, sehingga model inilah yang digunakan untuk peramalan.

Setelah diperolah model ARMA yang sesuai, langkah selanjtnya adalah memeriksa kekonstanan variansi sesatan. Hal ini disebabkan oleh salah satu asumsi dari model ARMA yaitu memiliki variansi sesatan yang konstan dari waktu ke waktu.

Langkah-langkah pengujian mengikuti prosedur yang dilakukan oleh Engle (1982) yaitu sebagai berikut:

1. Rumuskan hipotesis
   H_0 : Tidak terdapat GARCH error
   H_1 : Terdapat GARCH error
2. Besaran-besaran yang diperlukan
   i. Variansi sample residual:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{a}^2}{T}$$

ii. Fungsi autokorelasi residual kuadrat

$$r(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T} (\hat{a}_t^2 - \hat{\sigma}^2)(\hat{a}_{t-k}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\sum_{t=1}^{T} (\hat{a}_t^2 - \hat{\sigma}^2)^2}$$

iii. Statistik uji

$$Q(k) = T(T+2)\sum_{k=1}^{T/4} \frac{r_k^2}{T-k}$$

iv Kriteria pengujian

Tolah H_o jika Q(k) > χ^2((1-α), T/4)

v. Kesimpulan

Pada tahap verifikasi telah diperoleh model yang sesuai dengan data yang ada yaitu model ARMA(0,3), langkah selanjutnya adalah menentukan nilai sesatan dari model ARMA(0,3), dilanjutkan dengan penentuan nilai fungsi autokorelasi dari residu kuadrat. Setelah nilai-nilai tesebut diperoleh maka nilai Q hitung untuk berbagai lag yang kemudian akan dibandingkan dengan nilai Q table dengan taraf nyata 5%. Nilai-nilai tersebut disajikan pada table berikut:

Lag (1)	**Fak (2)**	**Q hitung (3)**	**Q table (4)**
1	0.640	45.48	3.84
2	0.252	52.61	5.99
3	0.166	55.76	7.81
4	0.186	59.71	9.48
5	0.189	63.82	11.07
6	0.057	64.19	12.59
7	-0.029	63.0	14.07
. . .	. . .	. .	. . .
22	-0.004	71.13	33.92
23	-0.017	71.17	35.17
24	-0.047	71.49	36.41
25	-0.041	71.72	37.65
26	-0.046	72.03	38.88
27	-0.058	72.53	40.11

Dari table di atas diperoleh bahwa nilai Q hitung untuk semua lag lebih besar dari nilai Q tabelnya. Dengan demikian H_o ditolak dengan kata lain bahwa terdapat GARCH error. Sejauh ini belum tersedia metode untuk menetukan spesifikasi model GARCH(p,q) error. Bollerslev (1986) memperlihatkan bahwa fak dari sesatan kuadrat yang diperoleh dari model ARMA merupakan fak dari suatu model ARMA(m,p) dengan m = maks (p,q).

Atas dasar hal tersebut maka dicari model ARMA yang sesuai untuk sesatan kuadrat. Mengikuti prosedur penentuan model diperoleh beberapa model ARMA yang mungkin adalah ARMA(1,1), ARMA(1,0), ARMA(0,2), ARMA(2,0) dan ARMA(2,2). Diantara kelima model tersebut hanya ARMA (1,1), ARMA(0,2) dan ARMA(2,0) yang memiliki koefisien cukup berarti, dan ARMA (1,1) adalah model yang memiliki variansi minimum. Sehingga model GARCH yang menjadi kandidat untuk sesatan kuadrat adalah GARCH(1,1), GARCH(1,0) dan GARCH(0,1)

Dari ketiga model GARCH diatas, semua parameternya signifikan berbeda dengan nol dan nilai-nilai Q hitungnya lebih kecil dari Q tabelnya, sehingga ketiga model diatas cocok untuk data yang ada. Tetapi model GARCH(1,1) memiliki variansi minimum disbanding dua model lainnya, sehingga model yang paling sesuai adalah GARCH(1,1) dengan persamaan

$h_t = 0,3658a^2_{t-1} + 0,5961h_{t-1}$.

Setelah didapat model yang paling sesuai, langkah selanjutnya adalah menggunakan model tersebut untuk peramalan, baik untuk peramalan laju inflasi maupun peramalan untuk peramalan variansi laju inflasi. Model runtun waktu yang diperoleh pada langkah sebelumnya adalah ARMA(0,3) dan model variansinya GARCH(1,1). Model-model tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$Z_t = a_t + 0,9041a_{t-1} + 0,6171a_{t-2} + 0,4032a_{t-3}$ dan

$h_t = 0,3658a^2_{t-1} + 0,5961h_{t-1}$

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan maka dapat ditentukan nilai peramalan enam bulan ke depan untuk laju inflasi, data lengkap disajikan pada table berikut:

Tabel Peramalan dengan asumsi variansi konstan:

Batas Bawah	Nilai ramalan	Batas Atas
-1.914	0.811	3.537
-3.221	0.452	4.126
-3.901	0.139	4.179
-4.187	0.000	4.187
-4.187	0.000	4.187
-4.187	0.000	4.187

Tabel Peramalan dengan asumsi variansi tidak konstan:

Batas Bawah	Nilai ramalan	Batas Atas
-0.022	0.811	1.645
-0.191	0.452	1.096
-0.358	0.139	0.636
-0.384	0.000	0.383
-0.296	0.000	0.296
-0.229	0.000	0.228

Jika diperhatikan ternyata nilai peramalan dengan asumsi variansi tidak konstan memiliki selang kepercayaan yang lebih sempit dibandingkan dengan selang kepercayaan dengan asumsi variansi yang konstan.

Daftar pustaka

Enders, W (1985). Applied Econometrics Time Series. New York: John Willey & Sons, Inc.

Hamilton dan James, D. (1994). Time Series Analysis. Princeton : Princeton University Press.

Soejoeti, Z. (1987). Analisis Runtun Waktu. Jakarta : Karunika, Universitas Terbuka.