HANDOUT
MATAKULIAH : STATISTIKA MATEMATIKA I

Disusun Oleh:

Entit Puspita, S.Pd, M.Si

NIP : 196704081994032002

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
2010

Minggu Ke : 1

Penyusun : Entit Puspita

Materi : 1. Pendahuluan Teori Peluang

1.1 Teori Himpunan

1.2 Ruang Sampel dan Peristiwa

1.3 Konsep Peluang

URAIAN MATERI PERKULIAHAN

1.1 Teori Himpunan

Definisi 1

Himpunan adalah kumpulan abjek-objek yang didefinisikan dengan jelas.

Setiap anggota yang termasuk ke dalam sebuah himpunan dinamakan anggota atau elemen dari himpunan tersebut. Sebuah himpunan biasanya dinotasikan dengan huruf kecil, capital, seperti : A, B, C dan sebagainya, sedangkan anggota – anggota himpunan ditulis dengan huruf kecil seperti: a, b, c dan sebagainya.

Contoh:

a. Himpunan 4 bilangan asli pertama, dituliskan $A = \{1, 2, 3, 4\}$

b. Himpunan Bilangan Real yang terletak antara 1 dan 4, ditulis : $B = \{x \mid 1 < x < 4\}$

Definisi 2

Jika masing – masing anggota himpunan A_1 adalah juga anggota himpunan A_2 maka himpunan A_1 dinamakan himpunan bagian dari himpunan A_2 dan ditulis $A_1 \subset A_2$. Jika $A_2 \subset A_1$ juga $A_1 \subset A_2$ maka dua himpunan tersebut mempunyai anggota-anggota yang sama dan ditulis $A_1 = A_2$.

Pada himpunan berlaku operasi – operasi sebagai berikut:

a. Gabungan dua himpunan A dan B, didefinisikan sebagai:

$$A \cup B = \{x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

b. Irisan dua himpunan A dan B, didefinisikan sebagai :

$$A \cap B = \{x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

c. Komplemen dari suatu himpunan A, didefinisikan sebagai :

$$A^c = \{x \text{ bukan anggota } A\}$$

d. Produk kartesian dari himpunan A dan B didefinisikan sebagai :

$$A \times B = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in A \text{ dan } x_2 \in B\}$$

1.2 Ruang Sampel dan Peristiwa

Untuk dapat menentukan ruang sampel terlebih dahulu kita harus melakukan suatu eksperimen, yang secara sederhana dapat diartikan sebagai suatu tindakan yang didefinisikan dengan jelas dan dapat diulang dengan kondisi yang sama. Pada saat suatu hasil yang mungkin dari suatu eksperimen tidak dapat ditentukan dengan pasti, tetapi hanya berdasarkan kemungkinan saja disebut dengan eksperimen acak. Eksperimen seperti ini yang menjadi bahan pembicaraan dalam matakuliah ini.

Definisi 3

Ruang sampel didefinisikan sebagai himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu eksperimen.

Definisi 4

Sebuah peristiwa adalah himpunan bagian dari suatu ruang sampel. Sebuah peristiwa terjadi apabila ada beberapa atau satu anggota yang merupakan hasil dari eksperimen.

Contoh:

Eksperimen pengundian dua mata uang, dengan ruang sampel = {AA,AG, GA, GG} dengan A + angka dan G = Gambar.

Peristiwa yang mungkin adalah:

P = Peristiwa munculnya dua gambar berturut – turut, dengan $P = \{GG\}$

Q = Peristiwa munculnya sebuah angka, dengan $Q = \{AG, GA\}$ dll

Karena sebuah peristiwa adalah himpunan bagian dari ruang sampel S, maka ada tiga kemungkinan yang akan terjadi:

- S itu sendiri adalah sebuah peristiwa
- $\emptyset$ juga merupakan peristiwa
- Beberapa hasil yang mungkin dari S dapat juga dipandang sebagai sebuah peristiwa.

Dengan menggunakan operasi-operasi himpunan, jika A dan B peristiwa-peristiwa maka:

- $A \cup B$ adalah peristiwa yang terjadi, jika A terjadi atau B terjadi (atau kedua – duanya terjadi)
- $A \cap B$ adalah peristiwa yang terjadi jika A terjadi dan B terjadi
- A^c adalah peristiwa yang terjadi jika A tidak terjadi.

1.3 Konsep Peluang

Dalam suatu eksperimen acak kita dihadapkan dengan suatu ketidakpastian apakah suatu peristiwa akan terjadi atau tidak terjadi. Jika suatu peristiwa pasti akan terjadi maka kita katakan peristiwa tersebut mempunyai peluang sama dengan satu. Sebaliknya jika suatu peristiwa tidak akan terjadi maka kita katakan peristiwa tersebut mempunyai peluang sama dengan nol. Tetapi dalam kehidupan sehari-hari jarang dijumpai peristiwa dengan peluang satu atau nol, tetapi terletak diantara nilai tersebut.

Definisi 5

domain $\mathcal{A}$ dan daerah hasil $[0, 1]$ yang memenuhi sifat – sifat sebagai berikut:

- (i) $P(A) \geq 0$ untuk setiap $A \in \mathcal{A}$
- (ii) $P(S) = 1$
- (iii) Jika $A_1, A_2, \dots$ adalah peristiwa – peristiwa yang saling eksklusif dalam $\mathcal{A}$ (yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j, i = 1, 2, \dots$) dan jika $A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, maka $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Teorema:

- a. $P(\emptyset) = 0$
- b. $P(A^c) = 1 - P(A)$
- c. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- d. Jika A dan B anggota $\mathcal{A}$ dan $A \subset B$ maka $P(A) \leq P(B)$

Contoh:

Misalkan kita melakukan pengundian 2 mata uang logam yang seimbang sekaligus, Jika B peristiwa tidak munculnya gambar, maka tentukanlah peluang terjadinya peristiwa B^c .

Jawab:

$S = \{AA, AG, GA, GG\}$ dengan A = angka, G = Gambar

B = Peristiwa tidak munculnya gambar, maka hasil yang mungkin dari B adalah $B = \{AA\}$ sehingga $P(B) = \frac{1}{4}$.

B^c = Peristiwa munculnya paling sedikit satu gambar muncul, maka hasil yang mungkin dari B^c adalah $B^c = \{AG, GA, GG\}$ sehingga $P(B^c) = \frac{3}{4}$ atau $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Minggu Ke : 2

Penyusun : Entit Puspita

Materi : 2 . Lanjutan Peluang

2.1 Hukum Perkalian, Kombinasi, Permutasi

2.2 Peluang Bersyarat

2.3 Peristiwa-peristiwa yang saling bebas

2.1 Hukum Perkalian, Kombinasi, Permutasi

Dalam menentukan nilai peluang suatu peristiwa, peristiwanya dapat juga ditentukan berdasarkan hukum perkalian, kombinasi, permutasi, sampling dengan pengembalian, sampling tanpa pengembalian.

Definisi 1

Jika sebuah operasi terdiri dari k tahap, tahap pertama dapat dilakukan dalam n_1 cara, untuk masing –masing cara ini tahap kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara, masing0masing cara tahapketiga dapat dilakukan dalam n_3 cara dan seterusnya sampai tahap ke-k dapat dilakukan dalam n_k cara, maka secara keseluruhan operasi dapat dilakukan dalam $n_1.n_2. \dots.n_k$ cara.

Contoh 1

Misalkan terdapat 6 buah angka yaitu : 1, 3, 5, 7, 8, 9. Kemudian dibentuk sebuah bilangan yang terdiri dari tiga angka dan setiap angka hanya digunakan sekali. Berapa peluang bahwa bilangan yang dibentuk adalah bilangan genap?

Jawab:

Misalkan A = bilangan yang dibentuk adalah genap, dengan susunan:

I	II	III
---	----	-----

Angka III (satuan) dapat diletakan satu angka, ini ditentukan terlebih dahulu karena sebagai penentu bahwa bilangan yang dibentuk adalah genap.

Angka I (Ratusan) dapat diletakan 5 buah angka

Angka II (Puluhan) dapat diletakan 4 buah angka

Sehingga $n(S) = 1. 5. 4 = 20$

Sedangkan $n(S)$ = banyaknya bilangan yang terdiri dari tiga angka secara keseluruhan dapat dibentuk = $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ cara.

$$\text{Sehingga : } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{120} = 1/6$$

Definisi 2

Susunan yang mungkin dari objek-objek yang berbeda “dengan” memperhatikan urutan disebut **permutasi**.

Teorema 1

Jika kita mempunyai n objek yang berbeda, maka banyaknya permutasi yang mungkin dari semua objek tersebut ada $n!$ cara.

Teorema 2

Misalkan kita mempunyai n objek yang berbeda, Jika diambil k objek dari n objek maka banyaknya permutasi yang mungkin ada:

$${}_n P_k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ susunan.}$$

Teorema 3

Banyak permutasi dari n objek, dengan n_1 adalah banyak objek pertama sama, n_2 banyak objek kedua sama, ..., n_k adalah banyak objek ke k sama dan $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ adalah:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} \text{ susunan.}$$

Definisi 3

Susunan objek – objek yang berbeda “tanpa” memperhatikan urutan disebut kombinasi.

Teorema 4

Misalkan kita mempunyai n objek yang berbeda. Jika diambil k dari n objek, maka banyaknya susunan yang mungkin ada : n an yang mungkin ada : n an yang mungkin ada : n an yang mungkin ada :

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ susunan.}$$

Definisi 4

Misalkan A adalah sebuah peristiwa yang ditentukan berdasarkan hukum perkalian, hukum permutasi atau kombinasi maka peluang terjadinya peristiwa A didefinisikan sebagai :

$$P(A) = N(A)/N(S)$$

Dengan :

$N(A)$ adalah banyaknya anggota peristiwa A yang ditentukan oleh salah satu hukum permutasi, kombinasi atau perkalian.

$N(S)$ adalah banyaknya anggota secara keseluruhan.

Contoh 2

Seorang siswa diminta menyelesaikan 7 buah soal dari 10 soal yang disediakan dalam suatu ujian tulis. Berapa peluang siswa tersebut harus mengerjakan 4 soal yang pertama.

Jawab:

Misalkan B = siswa tersebut mengerjakan 4 soal pertama dari 7 soal yang harus dikerjakan.

Banyaknya cara mengerjakan 4 soal dari 4 soal pertama adalah $= \binom{4}{4} = 1$

Banyaknya cara mengerjakan 3 soal dari 7 soal sisanya adalah $= \binom{7}{3} = 35$

Sehingga $n(A) = 1 \cdot 35 = 35$

$n(S) =$ Banyaknya cara mengerjakan 7 soal dari 10 soal yang tersedia $= \binom{10}{7} = 120$

Jadi $P(B) = 35/120 = 7/24$.

2.2 Peluang Bersyarat

Definisi 5

Jika A dan B adalah dua peristiwa dalam ruang sampel S, maka peluang bersyarat dari B diberikan A didefinisikan sebagai:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \text{ dengan } P(A) \neq 0$$

Dalam hal ini $P(B|A)$ berarti kita ingin menghitung peluang peristiwa B apabila peristiwa A telah terjadi.

2.3 Peristiwa – Peristiwa yang saling Bebas

Dua peristiwa A dan B dikatakan saling bebas, jika terjadi atau tidak terjadinya salah satu peristiwa tidak dipengaruhi oleh terjadinya peristiwa lainnya. Dalam hal ini $P(B|A) = P(B)$.

Definisi 6

Dua peristiwa A dan B dikatakan saling bebas jika dan hanya jika $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Teorema 5

Jika A dan B dua peristiwa yang saling bebas, maka:

- a. Dua peristiwa A dan B^c juga saling bebas
- b. Dua peristiwa A^c dan B juga saling bebas
- c. Dua peristiwa A^c dan B^c juga saling bebas

Teorema 6

Tiga peristiwa A, B dan C dikatakan bebas jika dan hanya jika dipenuhi syarat – syarat sebagai berikut:

1. Peristiwa – peristiwa yang berpasangan bebas, yaitu:
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
 $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
 $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
2. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Contoh 3

Misalkan kita melakukan pengundian dua mata uang logam yang seimbang secara sekaligus, jika B adalah peristiwa munculnya “gambar” pada urutan pertama dan C adalah peristiwa munculnya “paling sedikit satu gambar”, maka periksa apakah B dan C saling bebas?

Jawab:

$$S = \{AA, AG, GA, GG\}$$

$$B = \{GA, GG\}$$

$$C = \{AG, GA, GG\}$$

$$B \cap C = \{GA, GG\}$$

$$P(B) = 2/4$$

$$P(C) = 3/4$$

$P(B \cap C) = 2/4$, terlihat bahwa $P(B \cap C) \neq P(B) \cdot P(C)$, sehingga dapat disimpulkan bahwa B dan C adalah dua peristiwa yang tidak saling bebas, dengan kata lain A dan B adalah dua peristiwa yang saling bergantung.