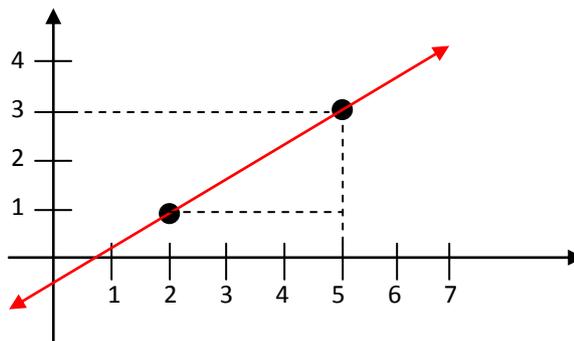


4. SISTEM PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN

4.1 Persamaan Garis

a. Bentuk umum persamaan garis

Garis lurus yang biasa disebut garis merupakan kurva yang paling sederhana dari semua kurva. Misalnya titik A(2,1) dan B(5,3) menentukan sebuah garis unik yang melalui titik tersebut.



Bentuk umum persamaan garis adalah :

$$ax + by + c = 0 \quad (\text{bentuk implisit})$$

$$y = mx + k \quad (\text{bentuk eksplisit})$$

b. Gradien garis

Gradien garis adalah kemiringan garis terhadap sumbu X positif atau

Gradien garis adalah Tangen sudut yang dibentuk oleh garis dengan sumbu X positif.

$$\text{Gradien garis } g \text{ adalah } m = \text{tg } \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

c. Persamaan garis yang melalui dua titik

Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah ;

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

d. Persamaan garis yang mempunyai gradien m dan melalui suatu titik

Persamaan garis yang mempunyai gradien m dan melalui titik (x_1, y_1) adalah ;

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

e. Jarak titik ke garis

Jarak dari titik (x_1, y_1) ke garis $ax + by + c = 0$ adalah ;

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

4.2 Persamaan Kuadrat

a. Bentuk umum persamaan kuadrat

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

b. Menyelesaikan persamaan kuadrat

Untuk mencari himpunan penyelesaian persamaan kuadrat bisa dengan cara :

(i) Rumus akar kuadrat

Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah ;

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(ii) Memfaktorkan

Bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dirubah menjadi $\frac{1}{a}(ax + p)(ax + q) = 0$ dengan

$p + q = b$ dan $pq = ac$

Akar-akar persamaannya adalah ; $x_1 = \frac{-p}{a}$ dan $x_2 = \frac{-q}{a}$

(iii) Melengkapkan kuadrat

Bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dirubah menjadi $(x + p)^2 = q$ dengan $p = \frac{b}{2}$ dan

$$q = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

c. Jenis Akar-akar Persamaan Kuadrat

Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat diselidiki dengan menggunakan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$ yaitu ;

- (i) Jika $D > 0$ maka persamaan mempunyai akar-akar real yang berbeda
- (ii) Jika $D = 0$ maka persamaan mempunyai akar-akar real kembar
- (iii) Jika $D < 0$ maka persamaan tidak mempunyai akar-akar real

4.3 Persamaan Lingkaran

a. Definisi lingkaran

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik pada bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Jarak yang sama disebut jari-jari sedangkan titik tertentu adalah pusatnya.

b. Bentuk umum persamaan lingkaran

Persamaan lingkaran yang berpusat di titik $(0,0)$ dan berjari-jari r adalah

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = x^2 + y^2 = r^2$$

Persamaan lingkaran yang berpusat di titik (a,b) dan berjari-jari r adalah

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Sedangkan bentuk umum persamaan lingkaran adalah

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Dengan pusat lingkaran adalah $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ dan jari lingkaran adalah

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}(A^2 + B^2) - C}$$

c. Garis singgung pada lingkaran

Garis dan lingkaran yang terletak pada satu bidang kemungkinan akan berpotongan, bersinggungan atau tidak berpotongan.

Misalkan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dan persamaan garis adalah $y = px + q$. Jika persamaan garis disubstitusikan ke persamaan lingkaran maka akan diperoleh persamaan kuadrat berikut ;

$$\begin{aligned} x^2 + (px + q)^2 + Ax + B(px + q) + C &= 0 \\ (1 + p^2)x^2 + (A + 2pq + Bp)x + C + Bq + q^2 &= 0 \end{aligned}$$

Persamaan ini disederhanakan menjadi $mx^2 + nx + k = 0$

Dengan nilai diskriminannya adalah $D = n^2 - 4mk$.

- (i) Jika $D > 0$, maka garis memotong lingkaran di dua titik
- (ii) Jika $D = 0$, maka garis menyinggung lingkaran
- (iii) Jika $D < 0$, maka garis tidak memotong lingkaran

Persamaan garis singgung lingkaran yang titik singgungnya diketahui dapat ditentukan sebagai berikut ;

- Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan titik singgung (p,q) mempunyai persamaan garis singgung lingkaran ; $px + qy = r^2$
- Persamaan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dengan titik singgung (p,q) mempunyai persamaan garis singgung lingkaran ;
$$(p - a)(x - a) + (q - b)(y - b) = r^2$$
- Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan titik singgung (p,q) mempunyai persamaan garis singgung lingkaran ;

$$px + qy + \frac{1}{2}A(x + p) + \frac{1}{2}B(y + q) + C = 0$$

Contoh

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ di titik singgung (2,3).

4.4 Sistem Persamaan/ Pertidaksamaan

a. Definisi

Dua persamaan atau lebih yang disajikan secara bersamaan disebut system persamaan.

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variable adalah ;

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \right\}$$

Dengan variabelnya adalah x dan y . Nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan itu disebut penyelesaian system persamaan yang dapat diperoleh dengan cara substitusi atau eliminasi atau determinan atau OBE (operasi baris elementer).

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variable adalah ;

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \right\}$$

Dengan variabelnya adalah x , y dan z . Nilai x , y dan z yang memenuhi ketiga persamaan itu disebut penyelesaian system persamaan yang dapat diperoleh dengan cara eliminasi atau determinan atau OBE (operasi baris elementer)

b. Matriks, determinan dan invers matriks

Matriks adalah kumpulan bilangan atau unsur yang disusun dalam baris dan kolom.

Bilangan-bilangan tersebut disebut elemen matriks atau komponen matriks.

Nama sebuah matriks biasa ditulis dalam huruf capital, sedangkan ordo adalah ukuran suatu matriks, yaitu banyak baris x banyak kolom.

MACAM-MACAM MATRIKS

(1) Matriks nol

Adalah matriks yang semua elemennya bernilai nol

(2) Matriks Bujursangkar

Adalah matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom

(3) Matriks Diagonal

Adalah matriks bujursangkar yang semua elemen diluar elemen diagonal utamanya bernilai nol.

(4) Matriks Skalar

Adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonal utamanya bernilai sama.

(5) Matriks Identitas

Adalah matriks skalar yang semua elemen diagonal utamanya bernilai satu.

(6) Matriks Segitiga Atas

Adalah matriks bujursangkar yang semua elemen dibawah elemen diagonal utamanya bernilai nol.

(7) Matriks Segitiga Bawah

Adalah matriks bujursangkar yang semua elemen diatas elemen diagonal utamanya bernilai nol.

DETERMINAN MATRIKS

Setiap matriks bujursangkar mempunyai determinan. Nilai determinan suatu matriks merupakan suatu scalar (konstanta). Jika nilai determinan suatu matriks sama dengan nol, maka matriks tersebut disebut matriks singular dan matriks singular tidak mempunyai invers. Determinan matriks A dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$

INVERS MATRIKS

Matriks yang tidak singular mempunyai invers. Invers matriks A dinotasikan dengan

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adjoin } A)$$

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka invers matriks A adalah ;

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

end

c. Menyelesaikan sistem persamaan linier dua variable (SPLDV)

d. Menyelesaikan sistem persamaan linier tiga variable (SPLTV)

4.5 Pertidaksamaan dan Grafiknya

a. Pengertian

b. Menyelesaikan pertidaksamaan

- Pertidaksamaan linier
- Pertidaksamaan kuadrat
- Pertidaksamaan polinom
- Pertidaksamaan rasional